КГАСУ(ОРС)
С86Б

А.Е.Сергеян А.Т.Демченко
Н.В.Дворянчиков Г.А.Джинчвелашвили

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ВЫСШАЯ ШКОЛА

УДК 624.04
ББК 38.112
С 20

Рецензенты:
кафедра строительной механики Московского государственного строительного университета
(член-корреспондент РААСН, заслуженный деятель науки и техники РФ, профессор, доктор технических наук Н.Н. Леонтьев),
кафедра САПР транспортных конструкций и сооружений Московского **государственного университета путей сообщения**
(член-корреспондент РААСН, лауреат премии академика Галеркина, профессор, доктор технических наук Н.Н. Шапошников)

Саргсян А.Е., Демченко А.Т., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А.

С 20 Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: Учебник/Под. ред. А.Е. Саргсяна. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Высш. шк., 2000. — 416 с.

ISBN 5-06-003867-X

В учебнике изложены основы теории с подробными методическими примерами расчетов из основных разделов курса строительной механики: предмета и задач строительной механики; расчета статически определимых и статически неопределимых стержневых систем; балок на упругом основании; устойчивости и динамики стержневых систем; изгиба и кручения тонкостенных стержней открытого профиля; расчета цилиндрических оболочек и толстостенных труб; основы теории пластичности и ползучести; предельное равновесное состояние систем; надежность конструкций.

Для студентов вузов, обучающихся по техническим специальностям. Может быть полезен студентам техникумов, колледжей, инженерам-конструкторам.

УДК 624.04
ББК 38.112

ISBN 5-06-003867-X

© ГУП «Издательство «Высшая школа», 2000

Оригииал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Строительная механика, а точнее *механика инженерных конструкций и сооружений* — наука о их прочности, жесткости, устойчивости, долговечности и надежности. Современные базовые учебники по строительной механике, как правило, посвящены подробному изложению теории. Данное обстоятельство усложняет процесс самостоятельного освоения предмета и послужило основной причиной подготовки настоящей книги к изданию.

Авторы в достаточно доступной, но строгой форме изложили основы теории классического курса механики инженерных конструкций и сопроводили их подробными примерами расчетов, что существенно облегчает процесс самостоятельного освоения предмета.

Заметим, что настоящий учебник по основам механики инженерных конструкций, совместно с учебником по сопротивлению материалов, теории упругости и пластичности [9] подготовлен к изданию коллективом авторов под общей редакцией доктора технических наук, профессора А.Е. Саргсяна. В единой методологической основе в этих учебниках охватывается достаточно полный цикл курса механики материалов, инженерных конструкций и сооружений.

Предисловие, главы 2, 4, 5, 7, 8 и 11 написаны А.Е. Саргсяном, глава 10 совместно с А.Т.Демченко, главы 6 и 9 — с Н.В. Дворянчиковым, главы 1 и 3 — с Г.А. Джинчвелашвили, в подготовке 10-й главы принимал участие О.В. Мкртычев.

При подготовке рукописи книги авторы с благодарностью учли ценные замечания и предложения, сделанные рецензентами книги — доктором технических наук, профессором, член-корреспондентом РААСН, заслуженным деятелем науки и техники РФ Н.Н. Леонтьевым и доктором технических наук, профессором, член-корреспондентом РААСН, лауреатом премии имени академика Б.Г. Галеркина Н.Н. Шапошниковым.

В настоящем издании авторами существенно переработан материал учебника [8] и добавлен ряд новых разделов, теоретическая часть сопровождается новыми методическими примерами расчетов, а также устранены замеченные неточности и опечатки.

Авторы

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

1.1. Предмет и задачи строительной механики. Опорные устройства. Виды нагрузок. Классификация сооружений и расчетных схем

Основными *задачами строительной механики, а точнее механики инженерных конструкций,* являются разработка методов для определения прочности, жесткости, устойчивости, долговечности конструкций инженерных сооружений и получения данных для их надежного и экономичного проектирования. Для обеспечения необходимой надежности сооружения, т.е. исключения возможности его разрушения, основные элементы конструкций должны иметь достаточно большие сечения. Экономика же требует, чтобы расход материалов, идущих на изготовление конструкций, был минимальным. Чтобы сочетать требования надежности с экономичностью, необходимо с большей точностью произвести расчет и строго соблюдать в процессе проектирования требования к возведению и эксплуатации сооружения, вытекающие из этого расчета.

В механическом расчете сооружений имеются две основные категории: воздействия и сопротивление.

Воздействиями является нагрузки, например, вес здания и оборудования, ветровое давление, динамические нагрузки от движущихся предметов и землетрясений, осадка опор, температурные расширения отдельных частей конструкций, усадка материалов и т.п..

Сопротивление представляет собой основную функцию несущих конструкций, которые должны образовать прочную неподвижную систему, способную противостоять всем действующим на сооружение воздействиям.

В соответствии с этим теория сооружений и инженерных конструкций должна состоять из двух частей: изучение и определение воздействий; определение сопротивления сооружения этим воздействиям.

В настоящее время наука о воздействиях на сооружения недостаточно разработана, что не позволяет ее систематизировано излагать

в учебниках. При выполнении практических расчетов часто приходится пользоваться приближенными нормативными данными о величинах нагрузок и воздействий.

Наука же о сопротивлении конструкций, об их прочности и деформативности развилась в обширную дисциплину — *строительную механику*, а точнее механику инженерных конструкций и сооружений, независимо от области их применения. Так как общеизвестно, что при решении задач, относящихся к данному предмету в различных областях (строительство, машиностроение, авиационная техника, судостроение и т.д.), применяется идентичный аппарат для их реализации.

В строительной механике различают: *одномерные задачи,* в которых искомыми факторами являются функции от одной пространственной координаты, *плоские задачи* — решение которых рассматривается в двух измерениях и *пространственные задачи* — решение которых рассматривается в трех измерениях по пространственным координатам. Обычно пространственные конструкции удается расчленить на плоские элементы, расчет которых значительно упрощается.

Задачи в строительной механике разделяются также на *линейные* и *нелинейные,* при этом различаются геометрическая и физическая нелинейности.

Геометрическая нелинейность задач возникает, как правило, при больших перемещениях и деформациях элементов, что сравнительно редко встречается в строительных конструкциях.

Физическая нелинейность проявляется при отсутствии пропорциональности между напряжениями и деформациями, т.е. при работе материалов конструкций за пределами упругости. Этим видом нелинейности обладают в той или иной степени все конструкции. Однако с определенной точностью при небольших напряжениях нелинейные физические зависимости можно заменить линейными.

Различают также *статические задачи* строительной механики, в которых фактор времени не фигурирует, и *динамические задачи,* учитывающие фактор времени и инерционные свойства конструкций, выражаемые через производные по времени. Следует различать также задачи, связанные с учетом вязких свойств материалов, ползучести, длительной прочности и т.п., в которых учитывается фактор времени, но пренебрегаются инерционные свойства системы, вследствие их незначительности. Таким образом, существует *механика живучести систем,* т.е. учет изменения механических свойств материалов конструкций во времени, куда, в частности, входит *теория ползучести, вязкости и старения.*

Так как предметом строительной механики является изучение прочности и жесткости инженерных конструкций, поэтому, как правило, для изучения этих свойств обычно достаточно рассмотреть ее упрошенную схему, с определенной точностью отражающую действительную работу последней. В зависимости от требований к точности расчета для одной и той же конструкции могут быть приняты различные расчетные схемы. Часто расчетную схему конструкции называют *системой.*

Расчетная схема, или *система,* конструкции состоит из условных элементов: стержней, пластинок, связей и включает также условно представленные нагрузки и воздействия.

Стержень в строительной механике определяется как тело, у которого два измерения малы по сравнению с третьим — длиной. Стержни могут быть прямолинейными и криволинейными, постоянного и переменного поперечного сечения. Основное назначение стержней - восприятие осевых сил (растягивающих и сжимаю-щих), а также изгибающих и крутящих моментов. Из стержней состоят расчетные схемы большинства инженерных конструкций: ферм, арок, рам, пространственных стержневых конструкций и т.д.

Пластинкой называют тело, у которого одно измерение мало по сравнению с двумя другими. Криволинейные пластинки назы,-вают *оболочками.* Пластинки воспринимают усилия в двух направлениях, что в ряде случаев наиболее выгодно и это приводит к экономии материалов. Расчет пластинок и систем, составленных из них, значительно сложнее расчета стержневых систем.

Связи в расчетных схемах конструкций, соединяющие между собой отдельные ее элементы: стержни и пластинки, называются *внутренними.* В реальных конструкциях внутренние связи осуществляются в виде болтов, заклепок, сварных соединений, замоноличенных стыков и т.п. В расчетных схемах сооружений связи различают по числу степеней свободы, которые они отнимают от системы. Основными видами внутренних связей являются *шарнирные* (рис. 1.1, *а)* и *шарнирно-подвижные* (рис. 1.1, *б)* соединения элементов.



Рис. 1.1



Рис. 1.2

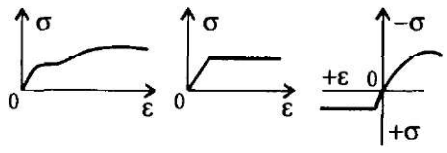
В рассматриваемой плоскости (рис. 1.1, *а)* шарнирные соединения исключают взаимные перемещения элементов в двух взаимноперпендикулярных направлениях, т.е. такое соединение отнимает от системы две степени свободы.

Шарнирно-подвижное соединение (рис. 1.1, б) исключает взаимное перемещение соединяемых элементов только в одном направлении — перпендикулярном к их осевым линиям, т.е. такое соединение отнимает от системы одну степень свободы.

Опорами называют *внешние* связи, соединяющие рассматриваемую конструкцию с другими конструктивными элементами или окружающей средой (рис. 1.2). Основными видами опор являются *шарнирно-подвижная (а), шарнирно-неподвижная (б)* и *жесткое защемление или заделка (в).* Шарнирно-подвижная опора представляет собой закрепление, которое исключает линейное перемещение опорного сечения в вертикальном направлении опорной плоскости (рис. 1.2, о). Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.2, б) исключает линейные смещения опорного сечения. Жесткое защемление или заделка (рис. 1.2, *в)* исключает как линейные, так и угловые перемещения конструкций в опорном сечении.

1.2. Механические свойства материалов конструкций и основные разрешающие уравнения строительной механики

Свойства материала конструкции имеют важное значение для характера ее работы. При умеренных воздействиях многие материалы конструкций могут рассматриваться как *упругие,* т.е. подчиняющиеся закону Гука. Например, это относится к стали, которая имеет почти строго прямолинейный начальный участок диаграммы зависимости напряжений **о** от деформаций е (рис. 1.3, о).



и

Рис. 1.3

Однако при больших напряжениях в стальных конструкциях пропорциональность между напряжениями и деформациями нарушается, и материал переходит в стадию пластического деформирования. *Действительная диаграмма* работы деформирования стали Ст-3, показанная на рис. 1.3, *а,* часто заменяется приближенной, *условной диаграммой,* состоящей из кусочно-линейных участков. Условная диаграмма, состоящая из наклонного

и горизонтального участков (рис. 1.3, *б),* носит название *диаграммы идеально упруго-пластического тела*, или *диаграммы Прандтля.*

Расчет по диаграмме Прандтля имеет свои особенности и называется расчетом по методу *предельного равновесного состояния.* Этот расчет дает возможность находить предельную несущую способность системы, при которой заданная система уже не может воспринимать дальнейшее приращение нагрузки, так как деформации беспредельно возрастают.

Сталь (Ст-3) допускает большие деформации без разрушения. В конце концов разрушение наступает и здесь, но предшествующие большие деформации могут быть своевременно замечены, и причина возможного разрушения может быть устранена. Поэтому с точки зрения безопасности конструкции Ст-3 является очень хорошим материалом.

Стали с повышенным содержанием углерода и легированные допускают меньшие пластические деформации до разрушения.

У разных материалов характер деформирования может значительно отличаться от приведенной на рис. 1.3 диаграммы деформирования стали Ст-3. Например, бетон с начала нагружения имеет криволинейную диаграмму работы на сжатие и почти не работает на растяжение. Железобетонные стержни благодаря наличию в них арматуры сравнительно хорошо работают на растяжение. Диаграмма зависимости напряжений от деформаций бетона показана на рис. 1.3, *в.*

Дерево при растяжении вдоль волокон подчиняется закону Гука, но разрушается хрупко. На сжатие оно следует криволинейной диаграмме работы, которая с известной степенью точности может быть заменена диаграммой Прандтля. Несмотря на то, что временное сопротивление древесины при растяжении больше, чем при сжатии, в строительных конструкциях избегают растянутых деревянных элементов, как опасных, ввиду хрупкого характера их разрушения (см. рис. 1.3, г.).

Следует заметить, что расчет по нелинейной диаграмме работы материала тоже не является вполне точным и строгим, так как фактическая диаграмма зависит не только от свойств материала конструкции, но и от режима нагружения: при больших скоростях нагружения она приближается к прямой линии закона Гука, при малых скоростях наблюдается рост пластических деформаций (рис. 1.3, *д).* Таким образом, в зависимость напряжений от дефор-маций входит фактор времени. Раскрытие этих зависимостей приводит к уравнениям ползучести, которые имеют вид уже не обычных алгебраических функций, а дифференциальных или интегральных соотношений.

Наиболее хорошо разработаны методы расчета конструкций из упругих материалов, т.е. подчиняющихся закону Гука. Строительная механика упругих линейно-деформируемых систем представляет собой стройную науку и наиболее широко применяется при выполнении практических расчетов.

Исходные уравнения строительной механики можно разбить на три группы.

Уравнения равновесия, представляющие статическую сторону задачи расчета сооружения. Эти уравнения устанавливают взаимосвязь между внешними и внутренними усилиями, которые входят в них линейно. Таким образом, уравнения равновесия всегда линейные.

Уравнения совместности деформаций, представляющие геометрическую сторону задачи расчета сооружений. В этих уравнениях деформации удлинения, сжатия, изгиба и т.п. связываются с перемещениями точек системы. В общем случае эти уравнения нелинейные. Но если учесть, что перемещения и деформации, как правило, малы для реальных систем по сравнению с размерами конструкций, то уравнения, связывающие их, становятся линейными.

Физические уравнения связывают напряжения с деформациями. Для многих материалов эти уравнения можно получить на основе закона Гука. Однако поскольку большинство материалов подчиняется этим зависимостям лишь при малых напряжениях, то линейную связь между усилиями и деформациями следует считать довольно грубым приближением, особенно в тех случаях, когда напряжения в конструкциях приближаются к разрушающим. Вместе с тем расчет на основе закона Гука можно считать оправданным при работе конструкции в стадии упругой деформации, когда до разрушения конструкции еще далеко.

Если все уравнения: равновесия, совместности деформаций и физические, составленные для данной конструкции линейные, то расчетная схема представляет линейно-деформированную систему, для которой справедлив *принцип независимости действия сил.* Этот принцип формулируется таким образом: если на конструкцию действует несколько видов нагрузок, то суммарный результат действия этих нагрузок равен сумме результатов действия каждой отдельной нагрузки. Это относится к усилиям, деформациям, перемещениям и другим расчетным величинам.

Из принципа независимости действия сил вытекает, что конструкцию можно рассчитывать на отдельные единичные усилия, а затем результаты умножить на значения этих усилий и сложить друг с другом.

Если хотя бы одно из геометрических или физических уравнений будет нелинейным, то принцип независимости действия сил в об-

щем случае неприменим, конструкцию следует рассчитывать сразу на суммарное действие всех нагрузок.

1.3. Анализ неизменяемости плоских систем

Элементами системы могут быть отдельные стержни, пластинки и массивы. Часто эти элементы и их группы можно с достаточной степенью точности считать абсолютно жесткими телами. Такие тела в плоских системах называют жесткими дисками, а в пространственных системах — жесткими блоками. Тогда элементами системы можно считать эти жесткие диски или блоки. В число дисков или блоков может входить основание, т.е. тело, на которое опирается система в целом, считается неподвижным.

Сложный шарнир образуется при шарнирном соединении в одной точке более чем двух дисков или блоков (рис. 1.4, *а).* Он эквивалентен (/с-1)-му простому шарниру, где *к* — число соединяемых им элементов (рис. 1.4, б).

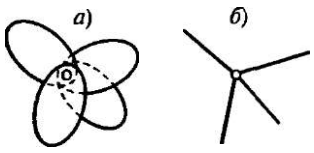


Рис. 1.4

Свойство системы изменять геометрическую форму при отсутствии деформаций в элементах называется ее *изменяемостью.* При определении степени изменяемости системы считают, что все элементы и связи абсолютно жесткие. Каждый жесткий диск в плоскости имеет *три степени свободы,* т.е. его положение в плоскости определяется тремя независимыми координатами - двумя поступательными перемещениями по направлению осей координатных *х* и *у,* и поворотом в плоскости *ху.* Каждый жесткий блок пространственной системы обладает шестью степенями свободы: тремя поступательными перемещениями в направлении координатных осей *х, у* и *Z,* и тремя поворотами вокруг этих осей.

Каждая элементарная связь отнимает одну степень свободы. Каждый простой шарнир уничтожает две степени свободы взаимной подвижности связанных им дисков или блоков. Пусть схема содержит *D* — дисков, *Ш* — шарниров, Со — опорных стержней. Тогда легко подсчитать число степеней свободы рассматриваемой системы:

$$W = 2D\text{-}2Ш\text{-}C_0\text{-} \qquad (11)$$

Если W> 0, то система является геометрически изменяемой и по определению не может служить в качестве расчетной схемы сооружения.

ю

Если $W < О$, то система имеет избыточное число связей. В этом случае можно утверждать, что система является статически неопределимой, но ничего определенного сказать нельзя относительно кинематической неизменяемости системы.

При $И^{/} = О$ система формально содержит достаточное количество связей, чтобы считать ее геометрически неизменяемой и статически определимой. Действительно, любая геометрически неизменяемая и статически определимая система должна удовлетворять этому условию.

Но условие $W < 0$ не гарантирует геометрической неизменяемости конструкции, т.е. при наличии лишних связей эти связи могут быть поставлены так, что в некоторой части система может оказаться геометрически изменяемой, а в другой — неизменяемой.

Поэтому всегда дополнительно проводится геометрический анализ структуры системы.

1.4. Статически определимые системы

Если число уравнений равновесия равно числу элементарных связей системы С, включая опорные, то усилия в этих связях можно однозначно определить из этих уравнений. Для этого необходимо, чтобы число связей С было равно в плоской системе $3D$, а в пространственной - $6Б$, так как общее число степеней свободы системы с жесткими элементами и связями:

$$n = 3\,D - C \text{ (в плоской системе);}$$

$$n = 6\,Б - C \text{ (в пространственной системе).}$$

Определенное таким образом число степеней свободы системы называется *степенью* или *числом геометрической изменяемости* системы. Реальные системы должны быть неизменяемыми, т.е. обладать нулевой или отрицательной степенью изменяемости.

Системы с одной степенью изменяемости называются *механизмами',* с несколькими степенями изменяемости — *кинематическими цепями.* Системы с нулевой степенью изменяемости называются *статически определимыми.*

Итак, в статически определимых системах п = 0. Заметим, что п — 0 для систем, находящихся в равновесном состоянии, является необходимым, а и = 0 и W= 0 необходимым и достаточным условием статической определимости и геометрической неизменяемости системы. Поскольку уравнения равновесия всегда линейные, то для определения внутренних сил в статически определимых системах можно пользоваться принципом независимости действия сил В

м

статически определимых системах значения усилий можно однозначно определить методом сечений с применением уравнений равновесия статики.

Статически определимые системы имеют и свои недостатки, главным из которых является отсутствие резервирования. В случае разрушения одного из элементов заданной системы, она превращается в геометрически изменяемую. Данное обстоятельство снижает надежность и безопасность статически определимых систем в эксплуатационных режимах. В этом отношении преимущество имеют системы с «лишними» связями, т.е. с отрицательной степенью изменяемости, получившие название *статически неопределимых систем.*

1.5. Расчет статически определимых многопролетных балок

В плоских балочных и рамных системах отдельные стержни могут быть соединены между собой жестко, с помощью шарниров, либо подвижными связями. Для определения внутренних усилий в стержнях можно составить условия равновесия каждого стержня, получив таким образом систему уравнений с неизвестными внутренними усилиями: концевыми значениями продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для каждого стержня. В *статически определимых системах* число составленных таким образом уравнений будет равно числу неизвестных, так что можно решить полученную систему уравнений относительно всех внутренних сил.

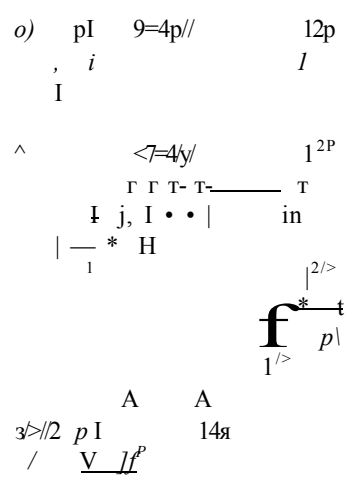


Рис. 1.5

Однако такой способ расчета является слишком громоздким. Анализ структуры системы и выявление присоединенных *к основной* части системы элементов позволяют вести расчет без решения полной системы уравнений с многими неизвестными. *Присоединенной* называется такая часть системы, которую можно удалить без нарушения неизменяемости оставшейся части.

Присоединенную систему можно рассчитать независимо от оставшейся части, причем опорные реакции присоединенной системы

будут служить внешними силами для оставшейся. На рис. 1.5 показаны статически определимая многопролетная балка и этапы ее расчета.

Основной балкой в данном случае является балка I, балка III является присоединенной, балка II присоединенная по отношению к балке I и основной по отношению к балке III (рис. 1.5, б).

Степень изменяемости системы, согласно п. 1.4:

$$я = 3 £> — C = 3\text{-}3 — 9 = 0.$$

Число степеней свободы системы определяется из (1.1):

$$3\ Z) - 2\ Ш - C_0 = 3\text{-}3 - 2\text{-}2\text{-}5 = 0.$$

Так как в данном случае выполняются необходимое и достаточное условие, т.е. $n = 0$ и $W = 0$, то данная схема геометрически неизменяемая и статически определимая. Рассчитав последовательно присоединенную балку III, получим реакции, передающиеся от балки III к основной балке И. Далее рассчитываем балку II, как присоединенную и получим реакцию, передающуюся балке I. Определение внутренних усилий в каждой балке рассматривается самостоятельно, считая их статически определимыми системами.

1.6. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок

Принцип независимости действия сил позволяет расчленять нагрузку на отдельные части и вести расчет порознь на действие каждой из них. Простейшей базовой нагрузкой является единичная сосредоточенная сила, приложенная в определенной точке и в определенном направлении. Из сосредоточенных сил можно получить любую нагрузку, в том числе и распределенную, путем предельного перехода к бесконечной сумме бесконечного числа сосредоточенных сил. Поэтому имея расчет системы на действие единичной сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке и по произвольному направлению, мы сможем легко рассчитать систему и на любую нагрузку. Данный подход является аналогом известного метода функций Грина из математики.

При перемещении точки приложения сосредоточенной силы усилие в рассматриваемом сечении системы, естественно, изменяется. График, изображающий закон изменения усилия или деформационного фактора в данном сечении в зависимости от положения на сооружении единичного груза с = 1, называется *линией влияния.*

Точно также можно определить линию влияния какого-либо перемещения, например прогиба в определенной точке, от действия

единичной сосредоточенной нагрузки, приложенной в различных местах системы.

Линии влияния главным образом применяют в балочных системах (а также в арках, фермах и других стержневых системах), в которых сосредоточенная сила может перемещаться вдоль пролета, сохраняя свое направление. При помощи линий влияния легко рассчитать балку на подвижную нагрузку, возникающую, например, при движении поезда или потока автомашин на мостовом пролете.

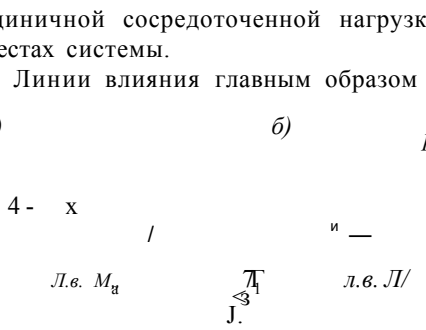


Рис. 1.6

Нетрудно построить линии влияния усилий в простых статически определимых балках. Опорные реакции балки (рис. 1.6, *а)* при единичной сосредоточенной силе, приложенной на расстоянии x от левой опоры, равны:

$$= \qquad (1.2)$$

где / — пролет балки.

Для сечений, расположенных слева от точки приложения сил (a < jc), изгибающий момент M^ = R^a, а для сечений, расположенных справа от этой точки *(a > x), $M_A = R_B$ (/-a).*

Следовательно, линию влияния изгибающего момента в сечении, расположенном на расстоянии *a* от левой опоры однопролетной балки, описывает график функции

$$M_n = \frac{(1-\frac{a}{l})x}{}, \quad \text{при} \quad 0 < x < a;$$

$$M_a = \frac{a(1-x)}{}, \quad \text{при} \quad a < x < 1.$$

Откуда следует, что линия влияния имеет вид треугольника с вершиной в заданном сечении *a* (рис. 1.6, *а).*

Линия влияния изгибающего момента в консольной балке для сечения, расположенного на расстоянии *a* от свободного конца (рис. 1.6, б), выражается формулами:

$$M_a = x - a, \quad \text{при} \quad 0 < x < a;$$
$$M_a = 0, \quad \text{при} \quad a < x < 1. \tag{14}$$

Аналогично строится линия влияния поперечной силы в произвольной точке, находящейся на расстоянии а от левого конца однопролетной или консольной балки. Эти линии влияния выражаются уравнениями:

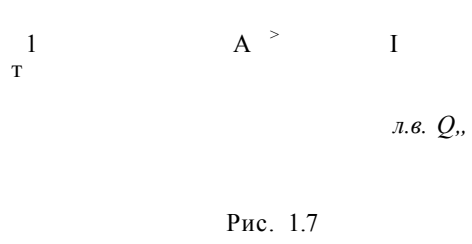


Рис. 1.7

для однопролетной балки (рис. 1.7, *а)*

$$Q_a = -R_B = -1 \quad \text{при} \quad 0 < x < a;$$
$$Qa = {}^{r}a = \frac{1-x}{I} \quad \text{при} \quad a < x < 1. \tag{1.5}$$

для консольной балки (рис. 1.7, б)

$$Q_a = 1, \quad \text{при} \quad 0 < x < a;$$
$$Q_a = 0, \quad \text{при} \quad a < x < l. \tag{1.6}$$

При $x = a$ линии влияния поперечных сил имеют скачок на величину, равную единице.

Несколько сложнее построение линий влияния усилий в элементах статически определимых ферм, арок, а также статически неопределимых систем.

Заметим также, что линии влияния усилий в статически определимых системах при движении груза по прямой изображаются отрезками прямых линий, в то время как линии влияния усилий в статически неопределимых системах, как правило, криволинейные.

По линиям влияния можно находить усилие, действующее в данном сечении. Если нагрузка представляет собой систему сосредоточенных грузов ***Pi, Pi, Pj,..., P_n*** (рис. 1.8), то усилие:

$$N = P_1 y_x + P_1 y_2 + \ldots + P_n y_n = \sum_{i=1} P_i y_i \tag{1.7}$$

где — ординаты линий влияния под грузами ***P/*** (/ = 1, 2, 3,..., ***n).***

_[_ _A.

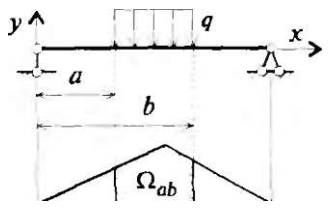


Рис. 1.8 Рис. 1.9

От распределенной нагрузки *q(x)* усилие через линии влияния определяется:

$$N = \int_a^b q(x)y(x)dx, \qquad (1.8)$$

где а и Ь — координаты начальной и конечной точек действия распределенной нагрузки.

Для равномерно распределенной нагрузки (рис. 1.9) *q* — const:

$$N = q\int_a^b y(x)dx = qCl_{ab}, \qquad (1.9)$$

где Cl_{ab} — площадь, ограниченная линией влияния, осью абсцисс и прямыми x = *a* и x = Ъ.

Следует подчеркнуть различие между понятиями линии влияния и эпюры, которая по определению также является графическим изображением закона изменения усилия или перемещения.

Ординаты и линии влияния, и эпюры моментов являются здесь функциями от координаты х. Однако в случае линий влияния эта координата определяет положение груза Р= 1, а в случае эпюры — положение сечения, в котором находится момент.

Часто нагрузка передается на конструкцию не непосредственно, а через систему статически определимых балок (рис. 1.10, а). Тогда, если единичный груз находится в начале пролета балки, т.е. в точке а, то он целиком передается на основную конструкцию и вызывает усилие, для которого построена линия влияния, численно равное y_a — ординате линии влияния, соответствующей I основной конструкции (рис. 1.10, б).

Если груз находится в конце пролета балки (точка Ь), то он также передается на основную конструкцию, вызывая усилие, численно равное *y/,* — ординате линии влияния в точке Ъ основной конструкции.

Рис. 1.10

Наконец, если груз находится в пролете балки на расстоянии ***t*** от точки *а* (рис. 1.10, *в),* то левая реакция балки будет фавна (/, - г)//, , а правая ***t/l***$_x$, (/$_t$ — пролет балки). Значение усилия в основной конструкции:

$$y = \frac{(h - t)y_a}{h} + \frac{ty_b}{h} \qquad (1.10)$$

т.е. линия влияния на участке движения груза по балке будет прямолинейная. Если основная линия влияния на этом участке ломаная или криволинейная, то при передаче нагрузки через статически определимую балку при переходе от ординаты y_a к ординате *у/,* эта линия влияния спрямляется.

Описанный способ передачи нагрузки на основную конструкцию называется *узловой передачей нагрузки.* Он особенно часто встречается в фермах, где опоры балок настила располагаются над узлами фермы, и балками служат сами панели верхнего или нижнего пояса (рис. 1.11).

Правило построения линии влияния усилия *S* при узловой передаче нагрузки заключается в следующем:

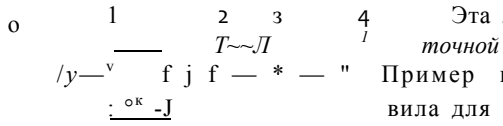
I *LP* Л

Рис. 1.11

1. Построить предварительно линию влияния искомого усилия при движении груза по основной части конструкции.

2. Зафиксировать ординаты построенной линии влияния под узлами передачи нагрузки.

3. Соединить прямой линией ординаты линий влияния под узлами передачи нагрузки.



Эта линия называется *передаточной прямой* линии влияния. Пример применения этого правила для построения линии влияния изгибающего момента для сечения *К* балки приведен на рис. 1.12.

Рис. 1.12

1.7. Матричная форма расчета усилий

При проведении расчетов с использованием вычислительной техники широко применяются *матрицы влияния,* т.е матрицы, элементами которой являются ординаты линий влияния. Задача расчета конструкции формулируется следующим образом.

Пусть требуется произвести расчет какой-либо статически определимой системы на действие заданной нагрузки (рис. 1.13, *а).*

Заданную систему заменим ее дискретной схемой, для чего наметим сечения /=1,2, 3,..., я, в которых требуется вычислить усилия 5,(/= 1, 2,3,..., я).

Заменяя распределенную нагрузку сосредоточенными силами, а момент, в виде пары сил, система внешних сил представляется в виде системы сосредоточенных сил (рис. 1.13, б) P^T = (Pi, Pi, />з,..., P_n), где P\ — значение внешней силы, приложенной в /-м сечении.

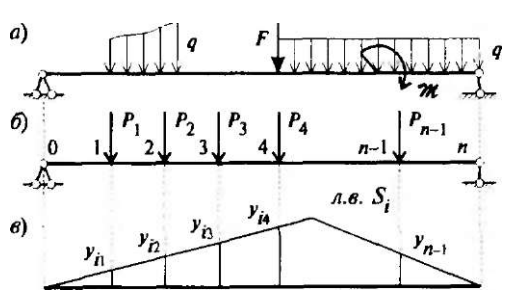


Рис. 1.13

Далее строятся линии влияния искомого усилия для сечений *i* = 1, 2, 3,..., *ti* заданной балки. Согласно принципу независимости действия сил для каждого /-го сечения, можно составить выражение искомого усилия в следующем виде:

$$Si = Уn\ P\ + Уil\ ^{P}2 + \dots + Уm\ ^{P}n = \sum_{\kappa=1} IУuc^{p}\kappa \quad (1.11)$$

где Ун* — значение искомого усилия в /-м сечении от единичной силы P/с = 1, приложенной в *к*-й точке (рис. 1.13, *б).*

Вводят векторы $S^{т}$ = (5,, S_2, 5_3,..., $5_{„}$); P^{m} = *($P_ь$ P_2, P_3, ..., $P_{„}$)* и матрицу L_s, элементами которой являются ординаты линий влияния:

$$L_s = \begin{matrix} Уn & У12 & \bullet\bullet\bullet & У In \\ У21 & У22 & - & У2n \\ Уm & Уn2 & & Уn,n \end{matrix} \qquad (1.12)$$

Эта матрица называется *матрицей влияния* усилия *S.* При помощи введенных обозначений соотношения (1.12) можно записать в виде:

$$S = L, P \qquad (1.13)$$

На практике строится матрица влияния изгибающих моментов L_M. Далее, используя эту матрицу, можно воспользоваться формулой $Q \frac{dM}{dx}$ и осуществить переход от матрицы влияния изгибающих моментов к матрице влияния перерезывающих сил. Для определения поперечной силы, действующей на произвольном /-м участке балки, ограниченной сечениями / и /-1, пользуясь дискретным аналогом последней формулы в виде

$$C/ = \frac{Mi\text{-}Mi.}{} \qquad (1.14)$$

она численно равна тангенсу угла наклона эпюры моментов.

Преобразованная матрица моментов может быть получена путем перемножения двух матриц:

$$Lq — K_{QM}\boldsymbol{I}'M > \qquad (1.15)$$

где Kq_M — матрица коэффициентов для преобразования матрицы влияния моментов L_M в матрицу влияния перерезывающих сил. Она имеет двухдиагональную структуру: на диагонали стоят единицы, а под диагональю -1.

1.8. Расчет статически определимой многопролетной балки (задача № 1)

Для многопролетной статически определимой балки требуется (рис. 1.14, *а):*

1. Проверить геометрическую неизменяемость системы.
2. Построить эпюры изгибающих моментов М и поперечных сил *Q* от заданной нагрузки.
3. Построить линии влияния *M* и *Q* для заданного сечения 1 статическим способом.
4. Загрузить эти линии влияния заданной внешней нагрузкой и сравнить полученные результаты со значениями ординат эпюр М и *Q* в этом же сечении в п. 2.

Решение

1. Проверка геометрической неизменяемости системы

Размеры балки и заданная система внешних сил показаны на рис. 1.14, *а.*

Многопролетная статически определимая балка (рис. 1.14, *а)* состоит из трех балок (дисков), соединенных между собой шарнирами *С* и *Е,* и имеет 5 опорных стержней. Число степеней свободы рассматриваемой системы подсчитываем по формуле (1.1):

$$W = 3D - 2Ш - Q = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

Степень изменяемости системы, согласно п. 1.4:

$$n = 3D - C = 3 \cdot 3 - 9 = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая статически определимая балка имеет необходимое количество связей и является геометрически неизменяемой системой. С методической целью проведем анализ геометрической неизменяемости балки и другим способом.

Для проверки неизменяемости данной многопролетной балки начнем геометрический анализ с рассмотрения балки АВС. Она соединена с землей тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке опорными стержнями и, следовательно, геометрически неизменяема, и может быть названа основной.

Балка *CDE,* являясь дополнительной по отношению к балке АВС, прикреплена к неизменяемой системе с помощью шарнира С, кинематически эквивалентного двум связям, а к земле — с помощью одного опорного стержня *D.* Так как направление указанного опорного стержня не проходит через шарнир С, балка *CDE* является геометрически неизменяемой.

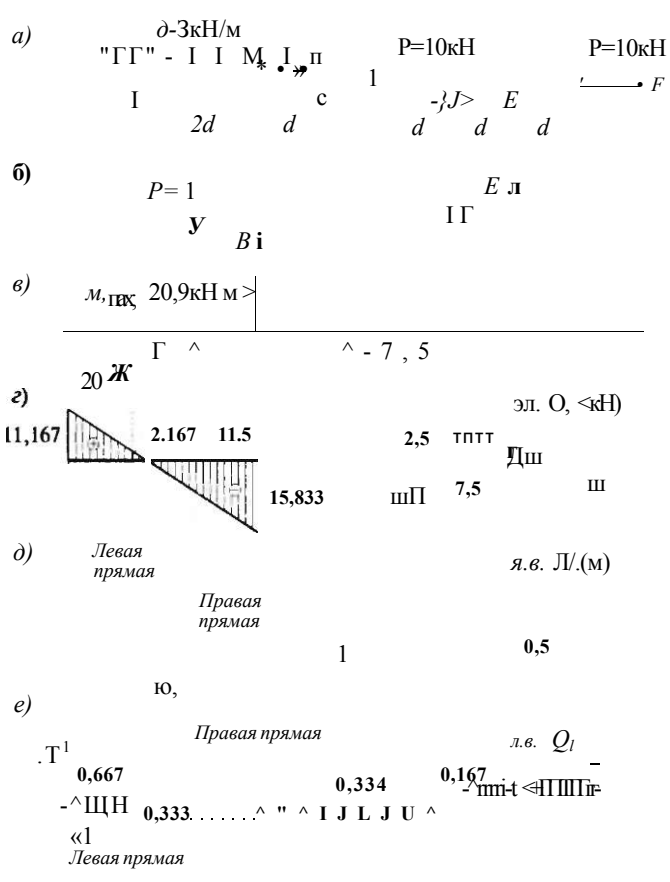


Рис. 1.14

Балка *EF* является дополнительной и прикреплена к неизменяемой системе шарниром Е, эквивалентным двум связям, а к земле - опорным стержнем F, направление которого не проходит через шарнир Е, и поэтому эта балка также геометрически неизменяема.

Таким образом, данная многопролетная статически определимая балка является геометрически неизменяемой.

2. *Построение эпюр изгибающих моментов М и поперечных сил Q от заданной нагрузки*

Для построения эпюр изгибающих моментов М и поперечных сил *Q* для многопролетной статически определимой балки необходимо отдельно построить эпюры для каждой балки (основной и дополнительных), а затем их совместить. При этом определение

ординат изгибающих моментов и поперечных сил следует вначале проводить для таких дополнительных балок, опорные реакции которых не зависят от нагрузок на других балках.

По расчетной («этажной») схеме (рис. 1.14, б) видно, что такой балкой является балка *EF*.

2.1. *Построение эпюр M и Q для дополнительной балки EE* Однопролетная балка *EF* имеет два участка (рис. 1.15, *а*). Так как сосредоточенная сила P приложена в середине пролета, то опорные реакции:

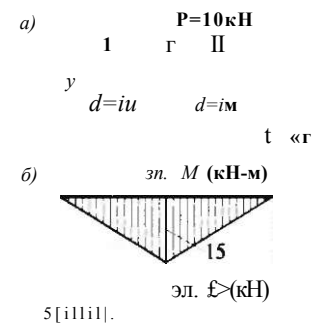


Рис. 1.15

$$Re = R\text{-}F \quad \frac{P}{2} = \frac{Ю}{2} = 5 \text{ кН}.$$

Максимальный изгибающий момент будет под силой и определится по формуле:

$$M = \frac{P1}{4} = \frac{10.6}{} = 15 \text{ кН-м}.$$

Поперечная сила:

на I участке $Q=R_E=$ 5кН,

на II участке $Q = -Rf = -5$ кН.

По полученным значениям ординат строим для балки *EF* эпюры изгибающих моментов M (рис. 1.15, б) и поперечных сил *Q* (рис. 1.15, *в*).

2.2. *Построение эпюр M и Q для консольной дополнительной балки CDE.* Данная однопролетная балка с консолью имеет три участка (рис. 1.16, *а*). На консоли в точке E от дополнительной балки ^действует сила *P/2* — 5 кН.

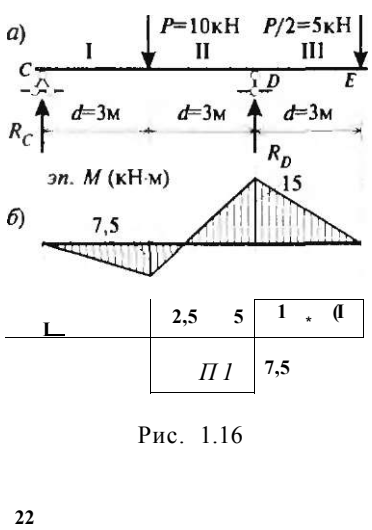


Рис. 1.16

Опорные реакции определяем из уравнений равновесия балки:

$$£M_C = 10\text{-}3 + 5\text{-}9\text{-}Лд\text{-}6 = 0,$$

откуда

$$R_D = \frac{10\text{-}3 + 5\text{-}9}{} = 12.5 \text{ кН};$$

$$= -10\text{-}3 + 5\text{-}9 + Дс\text{-}6 = 0,$$

откуда

$$Rc = \frac{10\text{-}3\text{-}5\text{-}3}{} = 2.5 \text{ кН}.$$

Обязательным является проверка правильности вычисления опорных реакций. В нашем случае

$$T_y = R_c + R_D \quad p \cdot L_2 \quad 2.5 + 12.5 - 10 - 5 = 0.$$

Следовательно, реакции определены правильно. Экстремальные значения изгибающиго момента возникают в сечении:

под действующей силой P $M = Rq \cdot d = 2.5 \cdot 3 = 7.5$ кН м;

в сечении D $M = = -5 \ 3 = -15$ кН м.

Поперечная сила по участкам принимает значения:

на I участке $Q = R_c = 2.5$ кН;

на II участке $Q = R_c - P = 2.5 - 10 = -7.5$ кН;

на III участке $Q = P/2 = 5$ кН.

По вычисленным ординатам строим эпюры M и Q (рис. 1.16, *б, в).*

2.3. *Построение эпюр Ми Q для основной балки* ABC. Эту однопролетную балку разбиваем на два расчетных участка. Основной расчетной нагрузкой балки является равномерно распределенная нагрузка. Кроме того, на консоли в точке C действует реактивная сила fy = 2.5 кН, возникшая от опорной реакции дополнительной балки CM^1 (рис. 1.17, *а).*

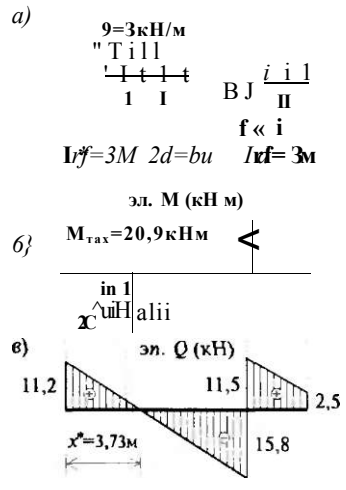


Рис. 1.17

Опорные реакции определяем из уравнений равновесия балки:

$$\sum M_A = ^ . 1\,2 - ^ - 9 + ^ 1 = 0,$$

откуда -

$$R« = \frac{2.5\text{-}12+1.5\text{-}12}{} = 27.33 \text{ кН};$$

$$= 0,$$

$$-2.5\text{-}3 + 3\,\frac{o2}{2} - 3\,\frac{32}{}$$

откуда $R,$ = 11.167 кН.

Проверим правильность вычисления опорных реакций по уравнению:

$$= {}^{r}a + RB -- {}^{R}C = \text{П}\bullet 167 + 27.333 - 36 - 2.5 =$$

$$= 38.5\text{-}38.5 = 0.$$

Отсюда следует, что опорные реакции определены правильно. Для определения $Л/_{тах}$ в пролете балки найдем вначале значение x, при котором $dM/dx = Q = 0$. Приравнивая выражение для Q на этом участке нулю, получим:

$$R_a\text{-}qx^* \quad =0,$$

откуда

$$x^* = \frac{R_A}{Я} = \frac{11.167}{3} = 3.73 \text{ м}.$$

Подставляя найденное значение X* = 3.73 м в аналитическое выражение для изгибающего момента на I участке, найдем значение M

$$Л/_{тах} = R_A x - \quad = 11.167 \bullet 3.73 - \frac{3\text{и}3_732}{2} = 20.91 \text{ кН м}.$$

Наибольший изгибающий момент на II участке будет в сечении B. Написав аналитическое выражение для $M_в$ и подставив значение параметров, найдем:

$$M_B = - \frac{aq^2}{2} \text{ j} \quad — \quad = \quad \frac{3\text{-}3^2}{} — 2.5 \bullet 3 = -21 \text{ кНм}.$$

Определим значение поперечной силы в характерных сечениях.

В опорном сечении A: $Q_A = R_A = 11.167$ кН.

Левее опоры B $Q^{тм} = R_A - Q$ 9 = 11.167-3• 9 = -15.833 кН.

Правее опоры B $Q^{\wedge} = R_B - Q^{тм} = 27.333 - 15.833 = 11.500$кН.

По полученным значениям M и Q в характерных сечениях участков строим эпюры.

При этом необходимо иметь в виду, что ординаты эпюры М откладываем со стороны «растянутых волокон», а эпюры Q — положительные ординаты откладываем вверх, а отрицательные — вниз.

Совместив эпюры M и Q всех трех балок, получим эпюры M и Q для многопролетной шарнирной бачки (рис. 1.14, *в*, *г).*

2.4. *Определение изгибающего момента M и поперечной силы Q в сечении 1:*

$$M, = Л_A - 3 - \frac{\wedge^2}{} - = 11.167\text{-}3\text{-}\frac{\wedge^2}{} - = 20 \text{ кНм};$$

$$Q_L = R_a - q \cdot 3 = 11.167 - 3 \cdot 3 = 2.167 \text{ кН}.$$

3. Построение линий влияния M и Q для сечения 1

Построение линий влияния внутренних силовых факторов *Ми Q* выполним статическим способом в следующем порядке:

- устанавливаем взаимодействие основной и дополнительных балок по «этажной» схеме (рис. 1.14, б);
- строим линии влияния внутренних усилий для однопролетной балки, в которой находится рассматриваемое сечение (см. методические указания к построению линий влияния в балках п. 1.6 и рис. 1.8 и 1.9);
- полученную линию влияния распространяем на всю длину многопролетной балки с учетом узловой передачи нагрузок. При этом следует иметь в виду, что при положении груза *P* = 1 над опорами балок внутренние усилия во всех сечениях равны нулю;
- определяем из подобия треугольников значения ординат.

Характерные из них указываем на линиях влияния, причем положительные ординаты откладываем вверх. Характерными точками линий влияния являются точки перелома под шарнирами.

Построим линии влияния *M* и *Q* в сечении 1 (рис. 1.14, *д, е).* Сечение 1 находится в основной однопролетной балке с консолью. Поэтому для нее линии влияния строятся, как для однопролетной балки с консолью. При их построении необходимо рассмотреть положение груза Р— 1 правее и левее сечения 1.

Левая и правая прямые линии влияния момента пересекаются под сечением 1, а линии влияния поперечной силы в этом случае имеют скачок на величину, равную единице. Ордината изгибающего момента под сечением определяется по формуле $P^{\wedge}j- = 1 \cdot \frac{3 \quad 6}{} = 2$м, где о = Зм и Ъ= 6м — расстояния от сечения 1 до опор *A* и *B* соответственно; / =9 м — пролет балки.

Далее линии влияния *M* и *Q* распространяются на правую панель, т.е. правую прямую следует продлить до конца консоли. Влияние дополнительных балок учитываем по правилу узловой передачи нагрузок следующим образом.

Так как ордината линии влияния в сечении 1 равна нулю, когда груз расположен над опорами *D* и *F,* то с конца консоли балки *ABC* проводим прямую, проходящую через нуль в сечении *D* и продолжаем до конца консоли балки *CDE,* откуда проводим прямую, проходящую через нуль в сечении *F.*

4. *Определение* Л/j и *Q\ от заданной внешней нагрузки с помощью построенных линий влияния*

Для вычисления изгибающего момента и поперечной силы по линиям влияния от нагрузки *q* ее интенсивность умножаем на алгебраическую сумму площадей соответствующих участков линии влияния. От сосредоточенных сил величину моментов и поперечных сил вычисляем как алгебраическую сумму произведений Pj на величину ординаты , взятых на линиях влияния под точками приложения грузов.

Так как в данной задаче многопролетная статически определимая балка загружена равномерно распределенной нагрузкой *q* и сосредоточенными силами, то изгибающий момент в сечении I определяем, пользуясь линией влияния (рис. 1.14, *д),* по формуле:

(116)

$$\sum_{*}^{k} (\text{й}_{\text{к}} = \text{со}, \cdot \text{со}_2 = \frac{2 \cdot 9}{I} \frac{1 \cdot 3}{I} = 17_5, \text{ м}^2,$$

$$I_{\text{к}} \text{со} * ? = 7.5 \cdot 3 = 22.5 \text{ кН-м};$$

$$I_{\text{I}} \boldsymbol{P, y_t} = -10 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.25 = -2.5 \text{ кН-м}.$$

Тогда M\ = 22.5 - 2.5 = 20 кН-м. Полученное значение изгибающего момента в сечении 1 соответствует определенному аналитически.

Определим значение поперечной силы в сечении 1 по линии влияния *Q*! (рис. 1.14, *е),* пользуясь формулой:

$$Qi = \sum_{\text{к}}^{i} Qk + TPi \; У,, \qquad (1\text{-}17)$$

где $\text{Хс}_{\text{к}}\text{Од.} = -0, + g>_2 - g>_3 = \frac{0.333 \cdot 3}{2} + \frac{0.667 \cdot 6}{2} \; \frac{0.334 \cdot 3}{2} = 1 \text{ м};$

$$I_{\text{к}} \text{со}_{\text{к}} q = 1 \cdot 3 = 3 \text{ кН}; \; I_{\text{i}} \; Д_{\text{с}} = -0.167 \cdot 10 + 0.0835 \cdot 10 = -0.835 \text{ кН}.$$

Тогда *Qi = 3- 0.835 = 2.165* кН.

Полученные значения *Q* вычисленные аналитически и с применением линий влияния практически совпали: разница составляет всего 0.09%.

1.9. Расчет многопролетных статически определимых балок матричным методом (задача № 2)

Для многопролетной шарнирной балки (рис. 1.18, *а)* требуется:

1. Проверить геометрическую неизменяемость системы.
2. Заменить распределенную нагрузку сосредоточенными силами в узлах деления балки на панели и составить вектор нагрузки.
3. Составить матрицу влияния моментов для всех десяти сечений, отмеченных на схеме.
4. Составить матрицу влияния поперечных сил для всех участков балки.
5. Получить с помощью матриц влияния векторы изгибающих моментов и поперечных сил от нагрузки, преобразованной по п. 2.
6. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от заданной нагрузки.
7. С помощью матриц влияния построить линию влияния изгибающего момента в сечении 2.
8. Загрузить эту линию влияния заданной нагрузкой и сравнить значение М с результатом, полученным в п. 3.

Решение

1. Проверка геометрической неизменяемости системы

Данная многопролетная шарнирная балка состоит из трех дисков (балок), соединенных двумя шарнирами и пятью связями. Поэтому степень неизменяемости системы равна $W = 3D - 2Ш - Co = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.

Таким образом, система имеет как раз столько связей, сколько необходимо для геометрической неизменяемости. Проверим правильность постановки связей.

Диск (балка) **1**—3 присоединяется к земле тремя связями, образующими жесткое защемление. Следовательно, эта балка — основная.

Балка 3—8 соединяется с уже доказанной неизменяемой системой шарниром 3 и стержнем в точке 6, не проходящим через шарнир. Следовательно, эта балка — дополнительная и система балок 1—8 геометрически неизменяемая.

Балка 8-10 соединяется с балкой 1—8 при помощи шарнира в точке 8 и стержнем в точке 10, не проходящим через этот шарнир. Следовательно, эта балка — также дополнительная, и вся система геометрически неизменяемая. «Этажная» схема балки показана на рис. 1.18, б.

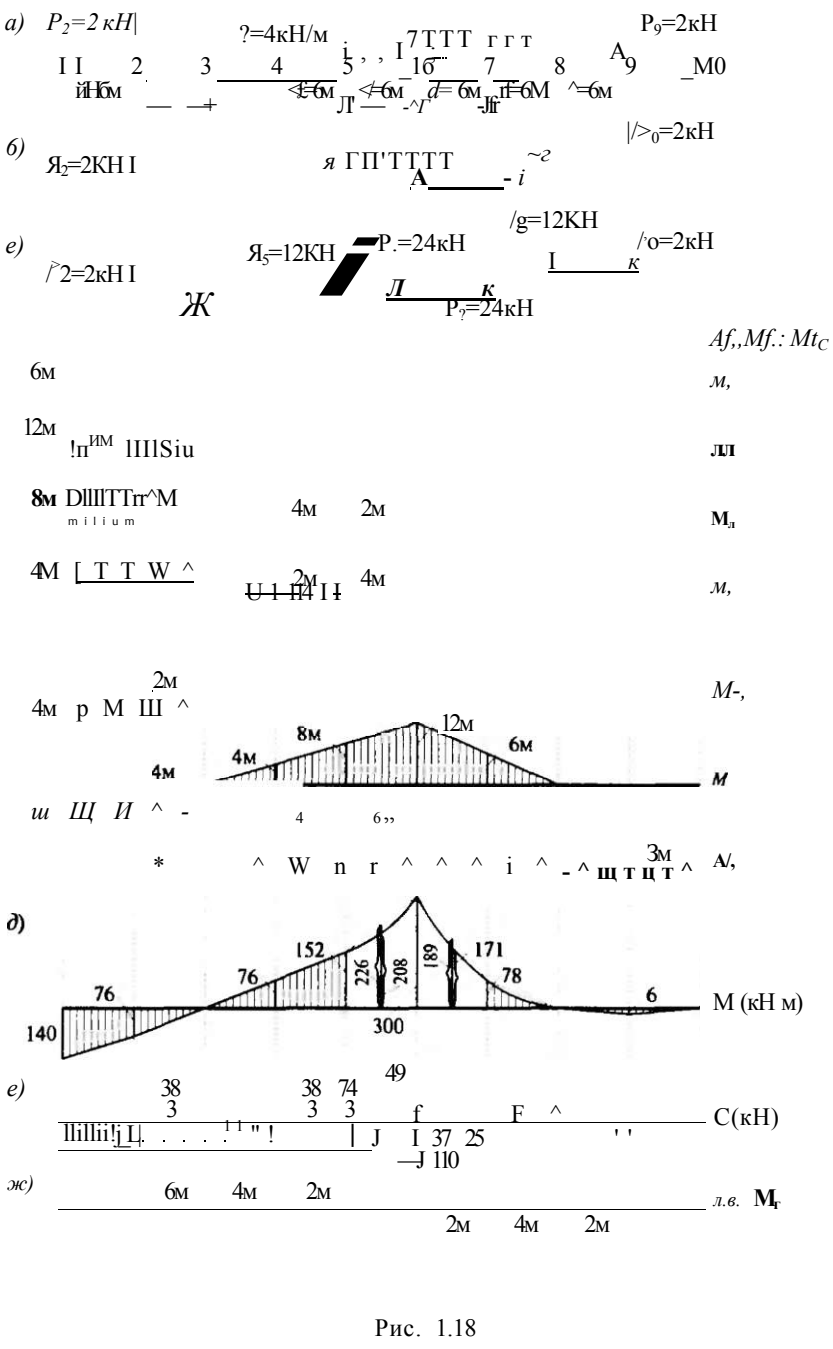


Рис. 1.18

2. *Замена распределенной нагрузки сосредоточенными силами и составление вектора нагрузки*

Разобьем заданную многопролетную балку на 9 участков, каждый длиной d= 6 м, и пронумеруем точки деления (рис. 1.18, о). Подсчитаем сосредоточенные силы в каждой из этих точек.

Для этого будем рассматривать каждый участок как балку на двух шарнирных опорах пролетом d и рассчитаем для этой балки опорные реакции от заданной нагрузки в пределах этого пролета. На границе двух участков сумма реакций, направленных в противоположную сторону, даст сосредоточенную силу в точке, являющейся границей двух смежных участков. Система полученных сосредоточенных сил является эквивалентной заданной внешней нагрузке:

$P_x = 0$; />$_2 = 2$кН; $P_ъ = 0$; $P_4 = 0$;

Р $_5$ = f = ^$_2$* = 12кН; Р $_6$ = ^ $_+$ ^ = ^ = 4.6 = 24кН;

$P_7 = qd$ = 24кН; 7>$_8$=^- = 12кН; P_9 = 2 кН; Ло = 0.

«Этажная схема» балки с полученными сосредоточенными силами показана на рис. 1.18, *в*.

Вектор нагрузки будет иметь вид:

$$/>m = (P_u\ P_2,\ P_h\ />_4,\ P_5,\ P_ь,\ P_ъ\ />_8,\ P_9,\ P_{10}) =$$

$$= (0;\ 2;\ 0;\ 0;\ 12;\ 24;\ 24;\ 12;\ 2;\ 0).$$

3. *Составление матрицы влияния моментов для всех сечений, отмеченных на схеме*

Заметим, что каждый столбец матрицы влияния моментов представляет собой ординаты линии влияния в характерных сечениях. Числа этой матрицы не обладают свойством взаимности, т.е. матрица влияния не является симметричной.

Составим матрицу влияния моментов для всех десяти сечений балки, соответствующих точкам деления балки на участки. С этой целью построим десять эпюр изгибающих моментов для заданной многопролетной балки от силы Р= 1, последовательно приложенной в каждой из десяти точек деления балки на участки. Эти эпюры показаны на рис. 1.18, *г*.

Записав последовательно ординаты каждой из эпюр по сечениям в виде столбцов матрицы, получим матрицу влияния моментов L_M:

	м,	$м_2$	Л/3	$м_4$	M_5	М6	$м_7$	м 8	$м_9$	$м_{10}$
	0	-6	-12	-8	-4	0	4	8	4	0
	0	0	-6	-4	-2	0	2	4	2	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	4	2	0	-2	-4	-2	0
Lm -	0	0	0	2	4	0	-4	-8	-4	0
	0	0	0	0	0	0	-6	-12	-6	0
	0	0	0	0	0	0	0	-6	-3	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

При записи матрицы L_M считаем, что если изгибающий момент растягивает нижние волокна балки, то ординаты положительные, если верхние, то ординаты отрицательные.

4. *Составление матрицы влияния поперечных сил для всех участков балки*

Матрицу влияния поперечных сил для всех участков балки можно было бы составить аналогично матрице влияния моментов, т.е. с помощью эпюр Q, построенных от последовательного загружения балки во всех точках деления на участки сосредоточенной силой $P=$ **1.**

Учитывая, что поперечная сила Q и изгибающий момент M связаны дифференциальной зависимостью $Q = \frac{dM(x)}{dx}$ которая для дискретных систем выражается формулой $Q = \frac{}{d}$ —[1], матрицу влияния поперечных сил можно получить путем умножения матрицы влияния моментов на матрицу перехода от матрицы влияния моментов к матрице влияния поперечных сил.

На основании дифференциальной зависимости между Q и M матрица перехода будет иметь вид:

	-1	**1**	0	• •	0	0	0"
			0	• •	0	0	0
$K_oM = d$			0	• •	0	0	0
	O	**O**	**O**	0 • •	0	-1	1

Получим матрицу влияния поперечных сил

$$LQ \sim Kqm\ L_m^{=}$$

-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	-12	-8	-4	0	4	8	4	0
0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	-4	-2	0	2	4	2	0
0	0	-1	I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	D	0	0	0
0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	0	2	-4	-2	0
0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	4	0	-4	-8	-4	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	-12	-6	0
0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	-3	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

"o	1	1	Ф	Ф	0	-ф	-ф	-l/з	0
0	0	I	Ф	l/з	0	-1/3	-ф	-^3	0
0	0	0	Ф	l/з	0	-1/3	'ф	-i/з	0
0	0	0	-1/3	ф	0	-1/3	-ф	-i/з	0
0	0	0	-1/з	-ф	0	-1/3	-ф	-уз	0
0	0	0	0	0	0	1	1	|/2	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1/2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1/2	0

5. *Определение векторов изгибающих моментов и поперечных сил*

Векторы (матрицы-столбцы) изгибающих моментов и поперечных сил могут быть определены с помощью матриц влияния моментов и поперечных сил по формулам: $M = L_U P$ и $Q = L_Q P$. Получим эти векторы от вектора нагрузки Р, характеризующей данную систему (п. 2):

'Ml'	0	-6	-12	-8	-4	0	4	8	4	0'	140
$м_2$	0	0	-6	-4	-2	0	2	4	2	0	2	76
Мъ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$м_4$	0	0	0	4	2	0	-2	-4	-2	0	0	-76
Ms	0	0	0	2	4	0	-4	-8	-4	0	12	-152
Mb	0	0	0	0	0	0	-6	-12	-6	0	24	-300
M_7	0	0	0	0	0	0	0	-6	-3	0	24	-78
Mi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0
$м_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	3	"0	2	6
Mxo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$Q = \begin{array}{l} Q\backslash \\ Qi \\ Q3 \\ \\ Qa \\ Qs \\ Qe \\ Qi \\ Q\% \\ \\ O9 \\ Q\backslash o \end{array} \begin{vmatrix} & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & \phi & \phi & 0 & -\phi & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \phi & \phi & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi & \phi & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi & \phi & 0 & -\phi & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi & -2/3 & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ' & 0 & " \\ & 2 & \\ & 0 & \\ & 0 & \\ & 12 & \\ & 24 & \\ & 24 & \\ & 12 & \\ & 2 & \\ & 0 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} " & -32/3 & * \\ & -38/3 & \\ & -38/3 & \\ & -38/3 & \\ & -74/3 & \\ & 37 & \\ & 13 & \\ & 1 & \\ & 1 & \\ & -1 & \end{vmatrix}$$

6. *Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил*

Компонентами вектора моментов М являются величины изгибающих моментов в соответствующих сечениях балки от нагрузки, полученной в п. 2. Откладывая эти величины в масштабе от базисной линии в соответствующих сечениях балки (рис. 1.18, г), получим эпюру изгибающих моментов (на участках, где действует распределенная нагрузка, эта эпюра показана пунктиром).

Для построения эпюры моментов от заданной нагрузки следует полученную эпюру на каждом из участков, где действует распределенная нагрузка, сложить с эпюрой моментов от распределенной нагрузки в пределах одного участка, если рассматривать этот участок как самостоятельную балку на двух шарнирных опорах (см. рис. 1.18, а, б).

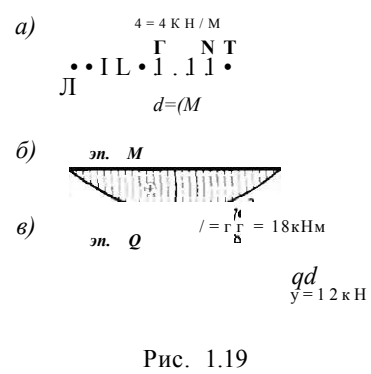


Рис. 1.19

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 1.18, *д*.

Компонентами вектора поперечных сил *Q* являются величины поперечных сил на соответствующих участках балки (постоянные по величине в пределах каждого участка) от нагрузки, полученной в п. 2. Откладывая эти величины в масштабе от базисной линии на соответствующих участках балки (рис. 1.18, е), получим эпюру поперечных сил (на участках, где действует распределенная нагрузка, эта эпюра показана пунктиром).

Для построения эпюры поперечных сил от заданной нагрузки следует проделать с полученной эпюрой Q ту же операцию, что и с эпюрой М.

Эпюра поперечных сил для отдельного участка, загруженного распределенной нагрузкой, показана на рис. 1.19, *в*. Эпюра поперечных сил для заданной балки показана на рис. 1.18, *е*.

7. *Построение линии влияния изгибающего момента в сечении 2*

Обозначим элемент матрицы влияния L_u через *ту*. Первый индекс / означает номер сечения, в котором определяется изгибающий момент, второй индекс *j* означает номер точки, где приложена единичная сила Р, = 1.

Таким образом, матрица L_u будет иметь следующий вид:

$$L_M = \begin{matrix} {}^{т}\backslash,\backslash & {}^{m}1,2 & Щ,3 & {}^{т}1,10 \\ m2,\backslash & {}^{m}2,2 & {}^{m}2,3 & m2,\backslash 0 \\ mзл & {}^{m}3,2 & {}^{m}3,3 & \text{"ЗДО} \\ {}^{m}10,1 & {}^{m}\backslash 0,2 & {}^{m}Ю,3 & \text{— "ЮДО} \end{matrix}$$

Рассмотрим столбец этой матрицы с номером *j*. По построению и по логике расстановки индексов элементы этого столбца являются ординатами эпюры моментов от действия единичной силы в точке / Выделим теперь строку матрицы L_u с номером /. У элементов этой строки первый индекс одинаков, следовательно, это численное значение изгибающего момента в сечении /. Второй индекс меняется от 1 до 10, следовательно, тц — это значения изгибающего момента в сечении / от действия единичной силы, меняющей свое положение. Другими словами, любая строка матрицы содержит значения ординат линии влияния момента в соответствующем сечении балки.

Следовательно, строка матрицы Lсоответствующая сечению 2 (вторая сверху), содержит ординаты линии влияния Mj. Откладывая эти ординаты в масштабе от базисной линии, получим линию влияния Щ. Линия влияния показана на рис. 1.18, ж.

8. *Определение изгибающего момента в сечении 2 от заданной нагрузки по линиям влияния М*

Загрузим линию влияния заданной нагрузкой и рассчитаем величину изгибающего момента в сечении 2:

$м_2$ = *Pi У2* + *Я* (л - *У5 УЦ-* + Л = 2 0 + 4. (4 - 2) + 2 • 2 =

= 76 кН-м.

Это значение Л/г полностью совпадает со значением $М_2$, полученным на эпюре *М* в сечении 2 (рис. 1.18, *д).*

1.10. Расчет трехшарннрных арок и рам. Линии влияния опорных реакций и усилий

Трехшарнирной аркой называется трехшарнирная система из двух криволинейных брусьев (рис. 1.20, *а).* Трехшарнирные арки относятся к *распорным системам,* которые характеризуются тем, что вертикальные нагрузки вызывают горизонтальные опорные реакции — *распор* (рис. 1.20, б).

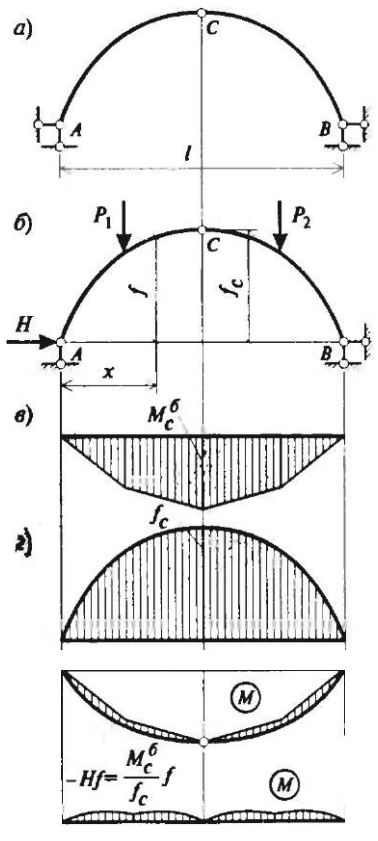


Рис. 1.20

Для расчета трехшарнирной арки применяют следующий подход. Исключают средний шарнир арки, заменив его жесткой связью между половинками арки, и удалив одну горизонтальную опору. Полученная новая система представляет собой статически определимую однопролетную балку с криволинейной осью (рис. 1.20, б). Отброшенную горизонтальную опору заменяют усилием Н— неизвестным пока распором арки. От действия внешней нагрузки строят вдоль горизонтальной проекции арки эпюру моментов, как в обычной балке (рис. 1.20, *в).*

От действия единичного усилия Н = 1 также строят эпюру моментов, ординаты которой будут совпадать с ординатами оси арки (рис. 1.20, *в).* Окончательно эпюру моментов в арке можно вычислить по формуле:

$$M = M^б - H f, \qquad (1.18),$$

где M^6 - ординаты балочной эпюры моментов от внешней нагрузки; /- ординаты оси балки и эпюры моментов в криволинейной балке от единичного распора.

С расположением среднего шарнира момент в арке должен быть равен нулю

$$M_c = Л/f - Я/_c = 0 , \qquad (1.19)$$

отсюда получаем

$$\frac{д/б}{J_c} \qquad (1.20)$$

и подставляем это значение распора в формулу (1.18)

$$M = M^6 - M^б{}_c \wedge г . \qquad (1.21)$$

Окончательная эпюра моментов в арке показана на рис. 1.20, *д*. На рис. 1.20, е эта же эпюра, отложенная от горизонтальной линии, — «спрямленная эпюра».

В описанном подходе использован принцип выбора основной системы, которая получается из заданной путем введения и отбрасывания некоторых связей. Этот принцип широко применяется в классических методах расчета статически определимых систем, как в данном случае, и в случаях расчета некоторых сложных статически определимых ферм.

К распорным системам относятся также сложные арки, элементы которых представляют сами по себе стержневые системы фермы (рис. 1.21, а) или рамы (рис. 1.21, б).

б)

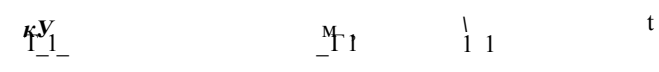


Рис. 1.21

Продольные и поперечные силы в любом сечении арки или рамы определяются из условия равновесия части системы, расположенной по одну сторону от рассматриваемого сечения. Предварительно заметим, что сумма вертикальных сил, приложенных

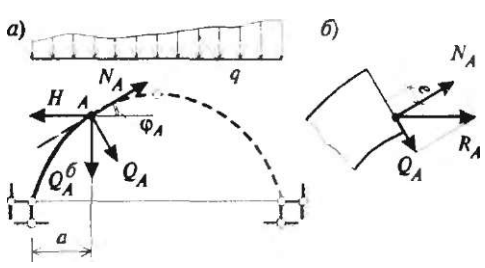


Рис. 1.22

слева от заданного сечения, равна балочной поперечной силе Q^ в спрямленной балке, свободно лежащей на крайних опорах арки и нагруженной заданной вертикальной нагрузкой.

Проектируя все силы, действующие слева от сечения x = a, на направление касательной к оси арки в точке *A* (рис. 1.22, *а),* получим выражение для продольной силы

$$N = -Q_A \sin q)^ - H \cos ф_л, \qquad (1.22)$$

где ф*а* — угол касательной к оси арки в точке *A*.

Проектируя те же силы на направление нормали к оси арки, получим поперечную силу

$$Q = Q_a \; совф^ - H \; втф^. \qquad (1.23)$$

Если на арку действует не только вертикальная, но и горизонтальная нагрузка P, то вместо распора H в формулах (1.22) и (1.23) следует брать сумму всех горизонтальных сил, действующих слева от точки *A*.

Разделив момент *Ma* на продольную силу N_A, получим эксцентриситет e ее действия в сечении арки, который определит точку пересечения равнодействующей внутренних сил в сечении арки с плоскостью этого сечения (рис. 1.22, б).

Геометрическое место таких точек, построенных для всех сечений арки, называется кривой давления арки. Она представляет собой линию действия внутренней силы, передающейся вдоль арки. Отношение ***QaJ^a*** равно тангенсу угла между касательными к кривой давления и к оси арки в том же сечении.

В особых случаях кривая давления может совпадать с осью арки. При этом изгибающие моменты по всей длине арки будут равны нулю. Такой случай будет иметь место, например, при нагружении круговой арки равномерной радиальной нагрузкой или при нагружении параболической арки равномерной вертикальной нагрузкой. Очертание оси арки, совпадающее с кривой давления, является оптимальным, т.е. наиболее выгодным при данной нагрузке.

В линейно-деформируемых системах с линиями влияния можно осуществлять простые арифметические действия: сложение, вычитание и умножение на постоянную величину, как с обычными числами или векторами. Учитывая это, можно воспользоваться для построения линий влияния моментов, поперечных и продольных сил в трехшарнирных арках формулами (1.18), (1.22), (1.23), причем линии влияния балочных моментов M_A и балочных поперечных сил Q_A строятся как в обычной однопролетной балке, а линии влияния распора Я легко построить по формуле (1.20), как линию влияния балочного момента M_A, деленную на стрелку арки f_c. Построение линий влияния в арке таким способом показано на рис. 1.23 и 1.24.

При выполнении расчетов для построения линий влияния в арке применяется и другой способ, называемый способом *нулевых точек,* который будет продемонстрирован ниже при расчете трехшарнирной арки и рамы.

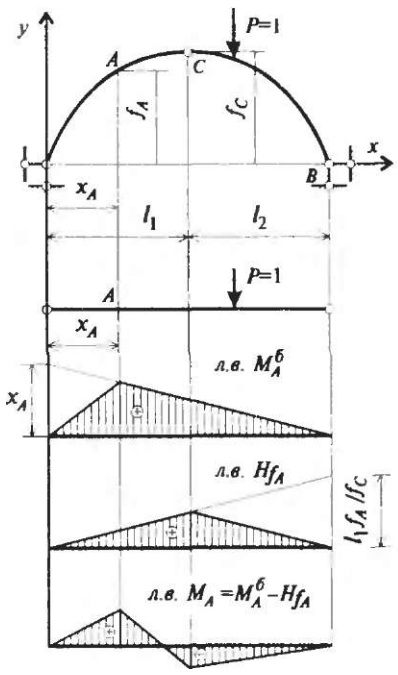


Рис. 1.23

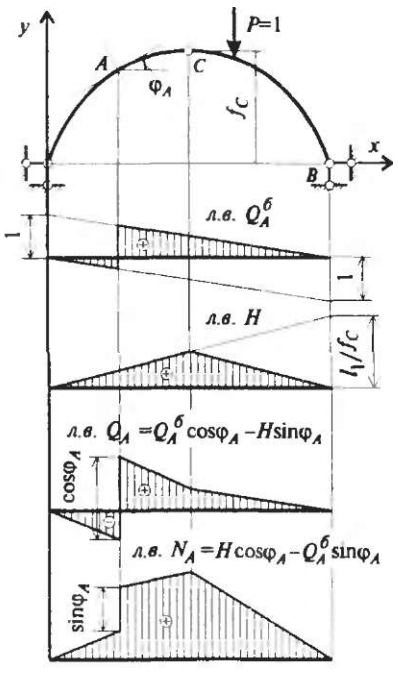


Рис. 1.24

1.11. Расчет трехшарнирной арки (задача № 3)

Для трехшарнирной арки с очертанием оси по квадратной параболе (рис. 1.25, *а)* необходимо:

1. Определение вертикальных опорных реакций и распора.
2. Определение внутренних усилий , *Qк и в* сечении *К—К* от нагрузок Р и д , аналитически.
3. Построить линии влияния изгибающего момента поперечной силы *Qk* **И** продольной силы Л^для сечения *К—К.*
4. Вычислить величины , *Qk* **И** *N^* по линиям влияния от заданной нагрузки ***Р*** и ***q*** и сравнить их со значениями, определенными аналитически (п. 2 задания).

Решение

1. Определение вертикальных опорных реакций и распора

Предварительно необходимо начертить строго **в** масштабе расчетную схему оси арки, ординаты которой должны быть вычислены по ее уравнению

В нашем случае

при $z_K = 2$ м, $y_K = 4 \cdot 8 \dfrac{(16-2)\cdot 2}{16^2} = 3.5$ м;

при $z = 4$ м, , $y = 4 \cdot 8 \cdot \dfrac{(16-4)\cdot 4}{16^2} = 6.0$ м;

при $z = 6$ м, , $y = 4 \cdot 8 \cdot \dfrac{(16-6)\cdot 6}{16^2} = 7.5$ м; и т.д.

Вертикальные опорные реакции V_A, V_B и горизонтальные опорные реакции (распор) H_A и $H_в$ вычисляем из уравнений равовесия системы. В данном примере имеем:

$ZM_A = 0$, - К 5 1 6 + Р 1 2 + 9 - 8 - 4 = 0, $V_b = \dfrac{40\text{-}12 + 2\text{-}8\text{-}4}{16} = 34$ кН;

$ZM_B = 0$, $-V_A$ l6-P-4-q-8 l2 = 0, $V_A = \dfrac{40\text{-}4 + 2\text{-}8\text{-}12}{16} = 22$ кН;

Z M ™ = 0, - • 8 - H_A - 8 - 9 - 8 - 4 = 0, $H_A = \dfrac{22\text{-}8\text{-}2\text{-}8\text{-}4}{8} = 14$ кН;

1г = 0, н Л - н в = о, $H_A = H_B = 14$кН.

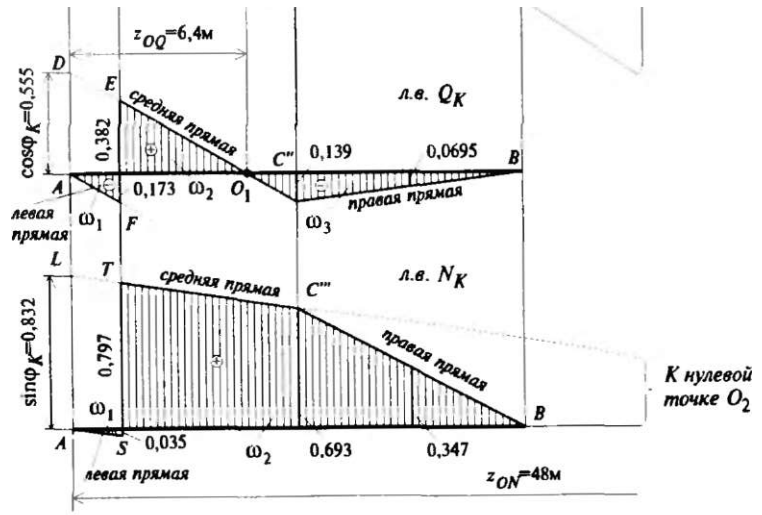
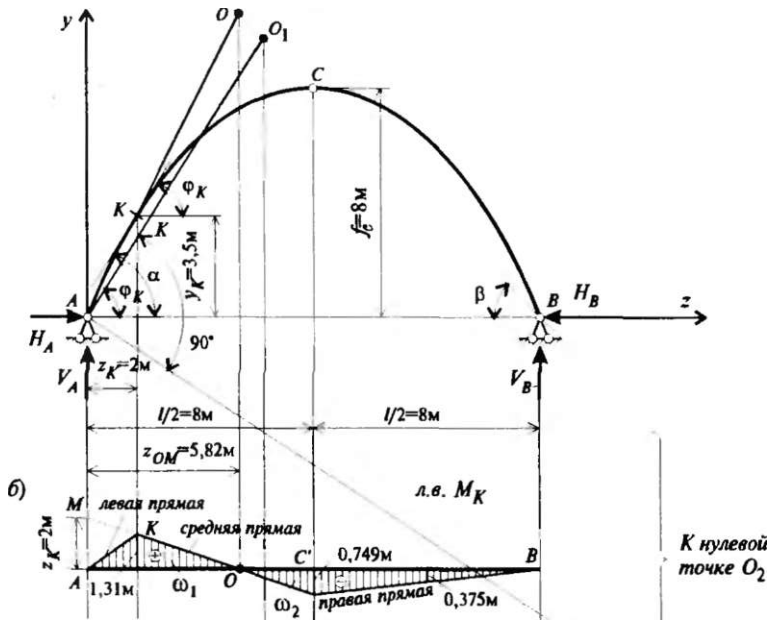

z_{OQ}=6,4м
D
E
средняя прямая
л.в. Q_K
софφ_K=0,555
0,382
C''
0,139
0,0695
B
A
0,173
ω_2
O_1
левая прямая
правая прямая
ω_1
F
ω_3
L
T
средняя прямая
C'''
л.в. N_K
sinφ_K=0,832
0,797
правая прямая
К нулевой точке O_2
ω_1
B
A
S
0,035
ω_2
0,693
0,347
левая прямая
z_{ON}=48м

Рис.1.25

Ж
I


y
O
O1
C
K
K
K
φK
φK
α
yK=3,5м
fc=8м
A
B
HB
z
HA
90°
β
zK=2м
VA
VB
l/2=8м
l/2=8м
zOM=5,82м
л.в. MK
б)
M
левая прямая
K
средняя прямая
zK=2м
C'
0,749м
B
A
1,31м
ω1
O
ω2
правая прямая
0,375м
К нулевой точке O2

Для проверки правильности определения опорных реакций составим следующие неиспользованные уравнения равновесия системы:

I? = 0, V_A-*q*.%-*P*+V_B=*Q*,

22 - 2-8 - 40 + 34 = 0, 56 - 56 = 0, 0 = 0;

Z M ^ = 0, -V_B%+H_B% + *PA* = *Q*,

-34-8 + 14-8 + 40-4 = 0, -272 + 112 + 160 = 0, 0 = 0.

Уравнения тождественно удовлетворяются. Следовательно, вертикальные опорные реакции и распор определены верно.

2. *Определение внутренних усилий , Qk* **И** *Nk возникающих в сечении К—К от нагрузок q и Р, аналитически*

Внутренние усилия *Мк, Qk* **И** *Nk*, возникающие в заданном сечении от нагрузок *q* и *Р,* вычисляем по формулам (1.18), (1.22), (1.23) соответственно:

$$M_K = M^{б}_{K} - H_A y_K -$$

$$QK = QK \cos q^{-} tf^{\wedge} \sin q)^{*}; \qquad (1.24)$$

$$MK = -QK^{\wedge\wedge}K - H_A \cos\Phi^{*},$$

где , ***QK*** — изгибающий момент и поперечная сила в сеч. ***К—К*** двухопорной балки с пролетом, равным пролету трехшарнирной арки и загруженным той же нагрузкой; — ордината оси трехшарнирной арки в сечении *К—К,* <pr — угол наклона касательной к оси трехшарнирной арки в сечении *К—К.*

При этом правило знаков для ***М*** и ***Q*** принимаем такое же, что и в балках, а для продольной силы *N* в арочных системах положительным принято считать сжатие.

В рассматриваемом примере

$$M^{б}K = V_a Z_K Q^{б} K = V_A - q z_K -,$$

$$dy \quad , Л/-2z_K) \quad_Л \mathbf{o} \quad (16\text{-}2\text{-}2)$$

sin<pjr = 0.832; соБф^- = 0.555; ***у к*** = 3.5 м.

Подставим найденные значения Л/f , Q^6_K , $cosy_K$, sintp* и y_K в формулы, получим величины внутренних усилий, возникающих в сечении *К—Кот* нагрузок *q* и *R*

$$M_K = У A\,2\,K - \hat{} - H_{д\,у\,к} = 22-2-\hat{}у--14-3.5 = -9\text{кНм};$$

$$QK = (\hat{}-92_{A:})\cos 9_A - - H_A sm q_K = (22 - 2\text{-}2)\text{-}0.555\text{-}14\text{-}0.835 = -L66\text{kH};$$

$$Nk = (Va\text{-}QZ_K)sm{<}p_K + H_A \cos\hat{} = (22 - 2 \cdot 2) \cdot 0.835 + 14 \cdot 0.555 = 22764\text{кН}.$$

3. Построение линий влияния MR, Q#U

В рассматриваемом примере все линии влияния строим способом нулевых точек.

Линии влияния внутренних усилий ***MR, QK И NK*** могут быть получены сложением известных линий влияния балочных моментов Мк и балочных поперечных сил Q*k* , а также линии влияния распора Н, умноженных на соответствующие коэффициенты выражений (1.18), (1.22), (1.23), что приводит к простым правилам построения линий влияния внутренних усилий в арках.

Ввиду того, что все слагаемые в этих формулах представлены кусочно-линейными функциями, определим абсциссы тех точек, в которых ординаты линий влияний влияний равны нулю. Эти точки называются *нулевыми.*

Очевидно, что к их числу относятся опорные точки шарнирной арки. Далее предположим, что при действии единичного груза Р = = 1 в точке, принадлежащей арке с абсциссой $г_0$м (см. рис. 1.25, а), вектор равнодействующих всех внешних сил, действующих в части системы, расположенной левее точки К, проходит через эту точку, тогда, очевидно, что изгибающий момент в сечении К в этом случае будет равен нулю. Для определения величины воспользуясь геометрическими соображениями (рис. 1.25, а), имеем:

$$^{z}OM^{l}B\text{ct} = (/ - 2_{0м}) \cdot \text{tgp},$$

откуда

$$^{2}_{014} - / \quad \frac{^{1}cP}{\text{tga} + \text{tgp}'}$$

Далее предположим, что, если единичная сила Р= 1 будет расположена в точке, принадлежащей арке, с абсциссой Z_0Q, а вектор равнодействующей всех внешних сил, действующих левее сечения *К,* параллелен касательной оси арки, проходящей через точку *К,* то

поперечная сила в этом сечении будет равна нулю. Из рис. 1.25, а, имеем

$$WS4>* = (^{/}-^{z}o<?)^{t}SP>$$

откуда

$$z_{00} = 1 \quad \frac{18(3}{tgfPA+tgP'}$$

Для определения нулевой точки линии влияния , нужно определить абсциссу точки приложения единичной силы P= 1, при котором нормальная внутренняя сила в сечении К равна нулю. Следовательно, нам необходимо определить такую точку приложения единичной силы *P* = 1, при котором общий вектор равнодействующей всех сил, расположенных левее сечения *К,* имеет направление, параллельное нормали оси арки, проведенной через сечение *К* (рис. 1.25, *а).* Таким образом,

$$2_{o„}tg(90-(p^*) = (z_{o„}-/)\cdot tgP,$$

откуда:

$$z_{т} - / \quad \frac{^P}{tgp-Ctg_{9jr}"}$$

3.1. *Построение линий влияния М%.* Линию влияния изгибающего момента для сечения К—К строим в следующем порядке:

1. Определяем положение нулевой точки О линии влияния **Л/д-** на ее оси абсцисс. Для этого проводим на схеме трехшарнирной арки прямые *АК* и *ВС* и точку пересечения их *(О)* сносим по вертикали на ось абсцисс линии влияния (точка О на рис. 1.25, б).

Расстояние этой точки от левой опоры находим по формуле

$$^{2oм} \quad , \quad \frac{tgp}{tgcT*^} \quad \frac{1.0}{175+I(j} \quad '$$

$$tga = ^ = f = L75; \quad tg_P = X = | = L0.$$

2. Зная положение нулевой точки О, проводим прямую линию, соединяя точку О с концом ординаты ri = = 2 м, отложенной вверх от оси абсцисс по вертикали, проходящей через опору *А.*

3. На проведенную прямую *МО* и ее продолжение сносим по вертикалям сечение *К—К к* средний шарнир С (точки *К* и С). Отрезок прямой АТС'является средней прямой линии влияния.

4. Соединяя точку *К* с нулевой ординатой под опорой *А,* а точку С' с нулевой ординатой под опорой *В,* получаем левую (*АК)* и правую *(С'В)* прямые линии влияния

Построенная таким образом линия влияния показана на рис. 1.25, б.

3.2. *Построение линии влияния Qx-* Эту линию влияния строим также способом нулевых точек в следующем порядке:

1. Определяем положение нулевой точки линии влияния Qx. Для этого проводим из точки *А* прямую, параллельную касательной к оси трехшарнирной арки в сечении *К—К,* до пересечения с прямой, соединяющей точки *В к С* (рис. 1.25, о), а затем точку их пересечения О] проектируем на ось абсцисс линии влияния (рис. 1.25, *в).* Полученная точка O_t и *является* нулевой точкой линии влияния Qx. Расстояние ее от левой опоры определяем по формуле

$$z_{0(0)} = I\frac{\overline{tgp}}{tgcp^* + tgP} = 16\frac{\overline{1.0}}{1.0 + 1.5} = 6.4 \text{ м}.$$

2. Откладываем на левой опорной вертикали положительную ординату г) = cos <*px* = 0.555 (отрезок *AD)* и проводим прямую *DO*\.

3. Через нулевую ординату под опорой *А* (точка *А)* проводим прямую *AN,* параллельную *DO*\.

4. На параллельные прямые *AN* и DO_x проектируем сеч. *К-К* (точки *Е* и *F)* и получаем левую прямую *AF* линии влияния. Если прямая *DO*\ не пересекается с вертикалью, проходящей через средний шарнир С, продолжаем прямую *DO*\ до пересечения с этой вертикалью и получаем точку С . Соединив точку С с нулем под опорой *В* (точка *В),* получим правую прямую (С В) линии влияния *Qx-* Прямая линия, соединяющая точки Е и С, является средней прямой линии влияния *Qx,* а прямая *EF* носит название соединительной прямой линии влияния Qx.

3.3. *Построение линии влияния N'x•* Линию влияния *N'x* строим также способом нулевых точек в следующем порядке:

1. Нулевую точку Oj линии влияния N'x находим как проекцию на ось абсцисс линии влияния точки пересечения прямой, проведенной из точки *А* перпендикулярно касательной к оси арки в сечении *К-К (AOj),* с прямой, проведенной через правую опорную точку *В* и средний шарнир С (рис. 1.25, *а, г).*

На рис. 1.25, *г* нулевая точка ф расположена за пределами данного чертежа. Расстояние этой точки от левой опоры определяем по формуле

$$Z_{\text{ш}} = I\frac{\overline{\quad}}{tgp - c\overline{tgcpjf}} = 16 \bullet \frac{\overline{\quad}}{1.0 - 0.667} = 48.0 \text{ м},$$

где /= 16 м; $ctgcp_K = \frac{1}{tg\varphi_K} = \frac{1}{1.5} = 0.667$; $tg\beta = \frac{/}{1/2} \frac{8}{8} = 1.0$.

2. Откладываем вверх на левой опорной вертикали ординату г) = sincp*-= 0.832 (отрезок *AL).* Соединив точку *L* с нулевой точкой Oj прямой линией и продолжив ее (если это необходимо) до пересечения с вертикалью, проходящей через средний шарнир (т. *C"),* получаем прямую *LC'"Oi.* В нашем примере точка *Oj* находится правее опоры *A* на расстоянии 48 м от нее и поэтому на чертеже не показана (рис. 1.25, ***г).***

3. Через нуль опорной вертикали (точка *A)* проводим линию, параллельную прямой *LC'"0^.*

4. На эти параллельные прямые проектируем сечение *K-K* (точки *T* и *S).* Полученная прямая *AS* носит название левой прямой, *TS*- соединительной прямой, а отрезок прямой *TC'"*- средней прямой линии **влияния NR.**

5. Соединив точку *C'"* с нулем под правой опорой, получаем правую прямую (прямая *C'"B)* линии влияния *Nr.*

4. *Вычисление величин Mx, Qx и Nx по их линиям влияния от заданной нагрузки quP*

Загрузив каждую линию влияния заданной нагрузкой *q* и *P* (см. рис. 1.25, *б, в, г),* величины внутренних усилий A*fx, Qx* и *Nx* находим по формуле

$$L = qm + Pr), \qquad (1.25)$$

где *L* — внутренние усилия соответственно *Mx*, ***Qx*** и ***Nx,*** возникающие в сечении *K—K\ q* — интенсивность заданной равномерно распределенной нагрузки *(q — 2* кН/м); to — алгебраическая сумма площадей участков линий влияния соответственно Mx, Qx и Nx, расположенных под равномерно распределенной нагрузкой; P —величина заданной сосредоточенной нагрузки (P = 40 кН); г) — ординаты линий влияния ***Mx, Qx*** и ***Nx*** под сосредоточенной нагрузкой P.

Следует подчеркнуть, что все характерные ординаты линий влияния и ординаты под нагрузками необходимо всегда определять аналитически из подобия треугольников.

Подставив в формулу (1.25) числовые значения *P, q,* ш и г) для каждой из линий влияния, вычислим величины Mx, Qx и Nx

Mx = *q*<£> + *Pr* = *2*- 2.995 + 40• (-0.375) = 5.9914- 15.00 = -9.0086кН м,

где г) = - 0.375 м;

ю = + = _ 0Л9_2Л8 = 3 8121 _ 0 8164 = 2 995 м>

Q_K =*дш* + *Рц* = *2 0.5562* + 40• (-0.0695) = 1.1124 - 2.78 = -1.6666кН,

где Ti = - 0.0695 м;

со = СО] + co_2 + co_3 = $\frac{-0.173 \cdot -2}{-}$ + $\frac{0.382 \cdot -4.4}{-}$ + $\frac{0.139 \cdot -1.6}{-}$ = 0.5562 м,

А^г^=?**СО**+Р**Л** = 2- 4.435 + 40 - 0.347 = 8.870 + 13.88 = 22.75 кН,

где г)= 0.374 м; со = coj + co_2 = $\frac{-0.035 \cdot -2 \quad (0.797 + 0.693) \cdot -6}{-}$ = 4.435 м.

Сравнение величин $M_к$, Q_K и N_K, полученных аналитическим способом и с применением линий влияния, приведено в табл. 1.1.

Из таблицы 1.1 видно, что результаты практически совпадают. В контрольных работах, выполняемых студентами, допускается расхождение величин не более чем на 3%.

Таблица 1.1

Усилие	Значение усилий, полученных аналитически	Значение усилий, полученных при помощи линий влияния	Процент расхождения
$M_к$, кН-м	-9.000	-9.009	0.1%
	-1.660	-1.668	0.5%
N_K, кН	+22.746	+22.750	0.02%

1.12. Расчет трехшарнирной рамы (задача № 4)

Для трехшарнирной рамы (рис. 1.26, о), принимая /= 6 м; /= 3 м; ***Zk*** = *2* м; *P* = 34 кН; *q*— 20 кН/м, требуется:

1. Определить вертикальные опорные реакции и распор.
2. Определить внутренние усилия ***Qk*** **И** **В** сечении *К—К.*
3. Построить линии влияния изгибающего момента $M_к$, поперечной силы *Qk* **И** продольной силы для сечения *К—К.*
4. Вычислить величины ***МК***, ***Qk*** **И** ***N*****К ПО** линиям влияния от заданной нагрузки ***P*** и ***q*** и сравнить их со значениями, полученными аналитически (п. 2 задания).

Решение

1. *Определение вертикальных опорных реакций и распора*

Вертикальные опорные реакции V_A, $V_в$ и горизонтальные опорные реакции (распор) H_A и $H_в$ вычисляем из уравнений равновесия системы:

$$Z M_A = 0, \quad -F_{/!}.6 + P\text{-}5 + 5y = 0, \quad V_B = \frac{34\text{-}5 + 20\,4т\text{-}}{2^2} = 35кН;$$

$$ZM_C = 0, \quad V_A \quad 6\text{-}P\text{-}1\text{-}£\text{-}2\text{-}5 = 0, \quad ^ = \frac{34\ 1+\ 20\ 1Q}{6} = 39kH;$$

$$Z\ 2 = 0, \quad H_л\text{-}\ H_в = 0, \quad H_A = H_B = 12.333 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим следующие уравнения равновесия системы $Ey — 0$ и $£M£^{рав} = 0$:

$$Ej = 0, \quad V_A\text{-}q\text{-}2\text{-}P + V_в = 0, \quad 39\text{-}\ 20\text{-}2\text{-}\ 34 + 35 = 0, \quad 0 = 0;$$

$$X\ M^{\wedge\prime} = 0, \quad -V_в\ \text{-}3 + H_в 3 + P2 = 0, \quad -35\text{-}3 + 12.333\text{-}3 + 34\text{-}2 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Уравнения $Ey = 0$ и

$= 0$ удовлетворяются. Следовательно, вертикальные опорные реакции и распор определены верно.

2. *Определение внутренних усилий* ***MR, QKUNK***

Внутренние усилия ***Mx, Qx*** и ***Nfc*** вычисляем по формулам (1.18), (1.22), (1.23) соответственно:

$$M_к = M^б_к - H_A\ y_к;$$

$$QK = QK \cos(j>_x - HA\ \ <i>x;$$

$$Nx = \sim QK \sin ФА: - H_Л\ сощ_к,$$

где $M^б_к$, Qx — изгибающий момент и поперечная сила в сечении *К*—А"двухопорной балки с пролетом, равным пролету рамы и загруженной той же нагрузкой; $y_к$ =/ — ордината оси трехшарнирной рамы в сечении *К—К*\ ф^—угол наклона касательной к оси трехшарнирной рамы в сечении *К—К*.

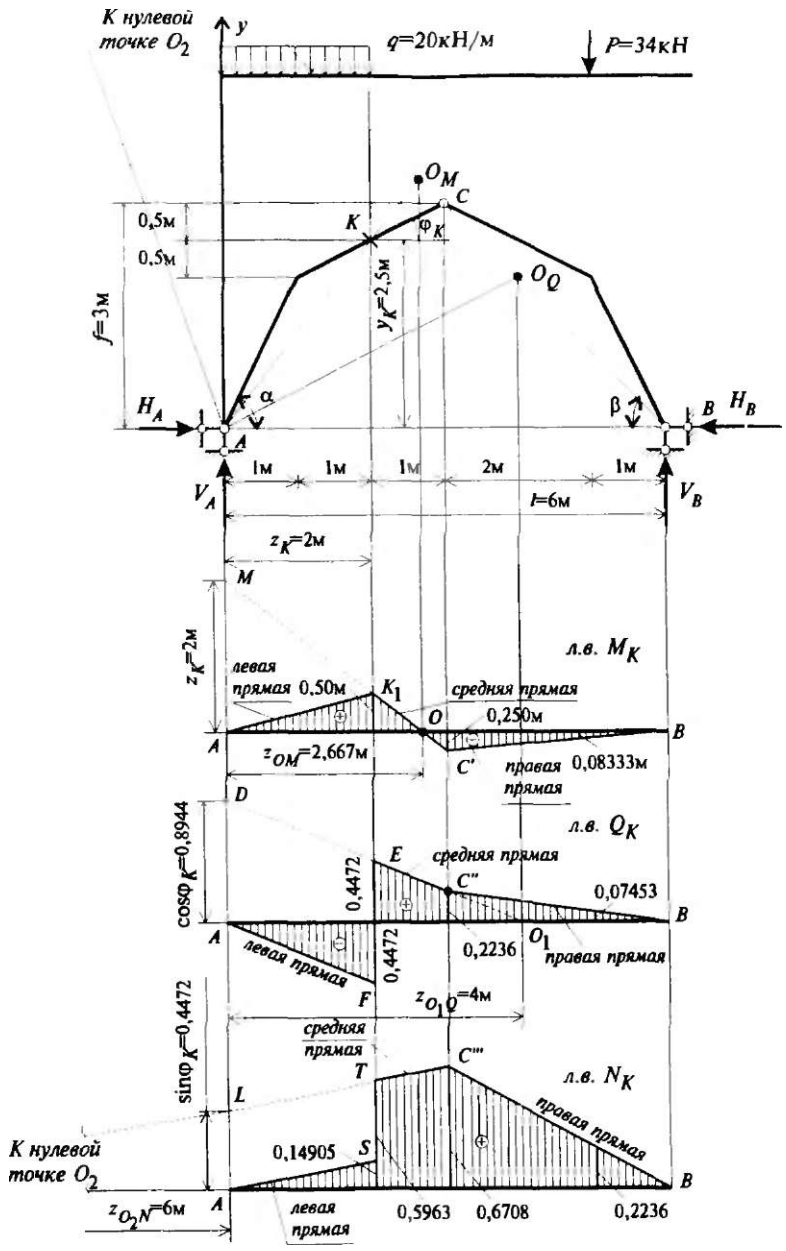

К нулевой точке O_2
y
q=20кН/м
P=34кН
O_M
C
K
φ_K
O_Q
0,5м
0,5м
f=3м
y_K=2,5м
H_A
A
α
β
B
H_B
1м
1м
1м
2м
1м
V_A
l=6м
V_B
z_K=2м
M
л.в. M_K
z_K=2м
левая прямая 0,50м
K_1
средняя прямая
0,250м
O
z_{OM}=2,667м
C'
правая прямая
0,08333м
D
л.в. Q_K
cosФ$_K$=0,8944
E
средняя прямая
0,4472
C''
0,07453
0,2236
O_1
правая прямая
левая прямая
0,4472
F
z_{O_1O}=4м
средняя прямая
sinФ$_K$=0,4472
C'''
T
л.в. N_K
L
правая прямая
К нулевой точке O_2
0,14905
S
z_{O_2N}=6м
левая прямая
0,5963
0,6708
0,2236

Рис. 1.26

При этом правило знаков для M и Q принимаем такое же, что и в обычных балках, а для продольной силы N в арочных системах положительным принято считать сжатие. В рассматриваемом примере:

$$M_K = y_{1K} \cdot Z_K - H_A y_K = 39 \cdot 2 - 12.333 \cdot 2.5 = 7.167 \text{ кН-м};$$

$$Q_K = \{y_1 \cdot \text{Ч1к } y^{**} y_K \sim H_A \text{siry}^* = (39 - 20 \cdot 2) \cdot 0.8944 -$$

$$- 12.3330.4472 = -6.41 \text{ кН};$$

$$N_K = (y_A - tfZA'')^{\sin} PA'' + H_A \cos(p_K = (39 - 20 \cdot 2) \cdot 0.4472 +$$

$$+ 12.333 \cdot 0.8944 = 10.58 \text{ кН},$$

где $\text{tgq}^* = \wedge = 0.5$; $\phi_к = 25.5°$; $\sin \phi^* = 0.4472$; $\cos \phi^* = 0.8944$.

3. *Построение линий влияния Мк, Q_K*

3.1. *Построение линий влияния Мк* (рис. 1.26, б). Определяем положение нулевой точки на оси абсцисс при Zk — 2 м.

Расстояние этой точки от левой опоры находим по формуле

$$Z_{\text{нр}} N = \frac{2 \cdot 7}{\text{tga} + \text{tgP}}; \Gamma = \frac{2 \cdot 3}{1.25 + 1} \Gamma = 2.66 \text{ м},$$

где $/ = A = 3$ м; $\text{tga} = Ц- = 1.25$; $t_g p = | = 1$.

Зная положение нулевой точки *ОМ,* проводим среднюю прямую линию *(ОМ),* соединяя точку *О* с концом ординаты *Zk* — 2 м (точка М), отложенной вверх от оси абсцисс по вертикали, проходящей через опору *А*. На проведенную прямую *МО* проектируем сечение *К—К,* и полученную точку *К* соединяем с нулевой ординатой под опорой *А*. Таким образом, получаем левую прямую *АК*\.

Для построения правой прямой вначале находим точку пересечения С" средней прямой *(ОМ)* с вертикалью, проходящей через средний шарнир, и соединяем ее с нулевой ординатой под опорой В.

Таким образом, полученная линия С'В есть правая прямая линии влияния Мк- Затем из подобия треугольников находим все характерные ординаты линии влияния $M_к$ •

3.2. *Построение линии влияния* Q_k (рис. 1.26, *в).* Положение нулевой точки *0*\ линии влияния Q_k находим по формуле:

$$z_{40} n = \frac{\text{ШР}}{\text{tgcp}^\wedge + \text{tgp}} \wedge = 6 \frac{1 \cdot 0}{1.0 + 0.5} = 4 \text{ м}.$$

Для построения средней прямой линии *влияния* ***QK*** на левой опорной вертикали откладываем положительную ординату cos = = 0.8944 (отрезок ***AD)*** и точку ***D*** соединяем с нулевой точкой ***0\.*** Затем через нулевую ординату под опорой ***A*** (точка ***A)*** проводим прямую ***AF.*** На параллельные прямые ***AF*** и ***DO*** проектируем сечение ***K—K*** (точки ***E*** и ***F).*** Чтобы построить правую прямую линии влияния Q***K*** , необходимо найти точку пересечения прямой DO\ с вертикалью, проходящей через средний шарнир С (точка ***C").*** Соединив точку С" с нулем под опорой *В* (точка *B),* получим правую прямую *(C"B)* линии влияния *Qx-* Из подобия треугольников находим все характерные ординаты линии влияния Qx •

3.3. *Построение линии влияния Nx* (рис. 1.26, *г).* Положение нулевой точки *О* линии влияния *N^* находим по формуле:

$$z_{o}^{o}{}_{>}^{N} = / \frac{}{tgb - ctgj_K} = б _ _ L\,i _ = _ 6 . o\ м,$$

$$1.0\text{-}2.0$$

где / = 6 м; ctg $= \frac{-}{tgPx} = \frac{}{0.5} = 2.0.$

Среднюю прямую линии влияния *Nx строим* следующим образом. На левой опорной вертикали откладываем положительную ординату sincpjf = 0.4472 (отрезок ***AL).*** Соединим точку ***L*** с нулевой точкой Oj прямой линией, которая и будет средней прямой линии влияния Nx - Для построения левой прямой проводим через точку ***A*** линию, параллельную ***LOj-*** На параллельные прямые ***AS*** и ***LOi*** проектируем сечение ***K—K*** (точки ***Тк S).***

Чтобы построить правую прямую, вначале находим точку пересечения *LO2* **С** вертикалью, проходящей через средний шарнир (точка *C'").* Точку *C"* соединяем с нулем под опорой *В.* Прямая *C'"B* и есть правая прямая линии влияния N_K. Масштабы ординат для линий влияния могут быть различными, но постоянными для каждой из них.

4. *Вычисление величин M**R**, Q**X** и N% по их линиям влияния от заданной нагрузки quP*

Загрузив каждую линию влияния заданной нагрузкой ***q*** и ***P*** (см. рис. 1.26, *б, в, г), величины* внутренних усилий *Qx* и *Nx* находим по формуле (1.25):

$$L = qu> + Ph,$$

где ***L*** — внутренние усилия соответственно ***MX, QK*** и ***NX,*** возникающие в сечении ***K—K*** ***q*** — интенсивность заданной равномерно распределенной нагрузки ***(q -*** 20 кН/м); со - алгебраическая сумма площадей участков линий влияния соответственно ***MK, QK И NX,***

расположенных под равномерно распределенной нагрузкой; Р —величина заданной сосредоточенной нагрузки (Р = 34 кН); И — ординаты линий влияния ***МХ, QK*** и ***NK*** ПОД сосредоточенной нагрузкой Р.

$M_к$ = + Р(-0.0833) = 2 0 — + ^{34} • (-0.0833) = 7.167 кНм;

Q_k = 20 $^{-O\ 4472\bullet\ 1}_{2}$ + 34 • 0.07453 = -6.410 кН;

Nx = 20 $^{01490\bullet 2}_{*}$ + 34 • 0.2236 = 10.58 кН.

Сравнивая полученные значения усилий, видим, что внутренние усилия ***МХ, QK*** **И** ***NX,*** найденные различными способами расчета, практически совпадают.

1.13. Балочные и консольно-балочные плоские фермы. Расчет фермы на постоянную и временную нагрузки

В шарнирно-стержневой системе элементами являются стержни, шарнирно скрепленные между собой по концам. Точки соединения стержней называются узлами. Для подсчета числа степеней свободы шарнирно-стержневой системы можно элементами считать ее узлы, а стержни, соединяющие узлы, — связями. При этом каждый узел считается обладающим двумя степенями свободы в плоскости и тремя в пространстве. Число степеней свободы получается равным удвоенному числу узлов для плоскости и утроенному — для пространственной шарнирно-стержневой системы.

В реальных фермах стержни соединены между собой не шарнирно, а жестко. Однако и в этом случае к ним применима с достаточной степенью приближения шарнирно-стержневая расчетная схема. Действительно, в реальных фермах стержни искривляются незначительно, а изгибная жесткость стержней очень мала, поэтому возникающие в стержнях изгибающие моменты пренебрежимо малы по сравнению с продольными силами, и можно полагать, что стержни работают как шарнирно закрепленные. Применимость шарнирно-стержневой схемы к реальным фермам подтверждена экспериментально.

В фермах, применяемых для покрытий и перекрытий, а также для мостов, различают верхний и нижний пояса и решетку. Решетка состоит из наклонных раскосов и вертикальных стоек (рис. 1.27).

Ферма по длине пролета делится на панели, обычно, ограниченные соседними узлами поясов. В однопролетной ферме, нагру-

женной действующей вниз нагрузкой, верхний пояс сжат, а нижний растянут; нисходящие раскосы вблизи опор фермы растянуты, а восходящие сжаты. Стойки решетки при нагрузке по верхнему поясу сжаты, а при нагрузке по нижнему поясу — растянуты.

В консольных фермах (рис. 1.28) верхний пояс растянут, а нижний — сжат.

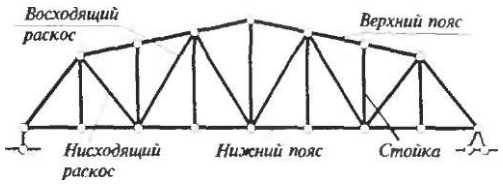


Рис. 1.27

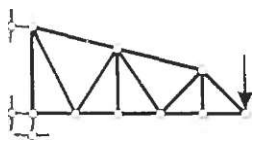


Рис. 1.28

Степень изменяемости шарнирно-стержневой системы определяется по формулам:

- для плоской системы $n = 2Y - C;$ (1-25)
- для пространственной системы $n - 3Y - C.$ (1.26)

Здесь Y— число узлов; C — число стержней, включая опорные.

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 1.27. Здесь У= 16, С= 32 . Следовательно, п =2-16 -32 = 0.

Для фермы, изображенной на рис. 1.28, имеем У= 9, С= 18. Таким образом, п = 2-9 - 18 = 0.

Степень изменяемости шарнирно-стержневой системы можно определить также по формулам (см. п.1.1), считая каждый стержень диском или блоком, а количество связей — путем подсчета простых шарниров, соединяющих каждую пару стержней. Однако этот способ, в данном случае, оказывается более сложным.

1.14. Методы расчета статическн определимых ферм

Из условия равновесия фермы в целом с начала определяются опорные реакции, далее для определения усилий в элементах фермы применяются различные подходы.

Наиболее простым методом определения усилий в стержнях статически определимой фермы является *метод вырезания узлов.* Разрезая мысленно стержни, сходящиеся в данном узле, и уравновешивая внешнюю силу, приложенную к нему, продольными усилиями, действующими по направлению каждого стержня, получаем необходимые уравнения для определения этих сил. При составлении уравнений равновесия предполагаем все внутренние силы рас-

тягивающими и действующими по направлению от узла (рис. 1.29, *а).*

Так как все силы, действующие на узел, пересекаются в одной точке, то для каждого узла плоской фермы можно составить два уравнения равновесия, выражающие равенство нулю сумм проекций всех сил на горизонтальную и вертикальную оси. Всего таким образом можно составить 2С число независимых уравнений. Поскольку число стержней в статически определимых фермах, включая опорные стержни, тоже равны 2С, то мы получаем полную систему 2С алгебраических уравнений с 2С неизвестными усилиями. Причем в каждое уравнение, составленное таким, образом,системы уравнений входят не все неизвестные, а обычно только их небольшая часть.

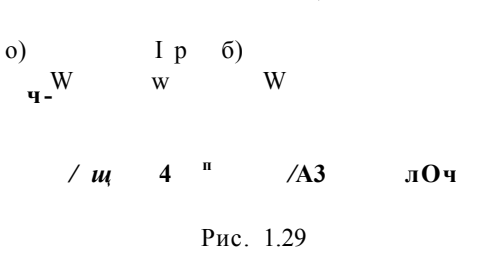


Рис. 1.29

Для упрощения расчета иногда берут сумму проекций всех сил на ось перпендикулярную одному стержню, и на ось Г), перпендикулярную другому стержню (рис. 1.29, б). При этом получаются два независимых уравнения, каждое из которых с одним неизвестным.

Другим эффективным способом расчета усилий в элементах фермы является *метод сечений.* Разрезав мысленно ферму на две части и отбросив одну из них, можно составить три уравнения равновесия для оставшейся части фермы. Если в разрез попадают только три стержня, то при помощи этих уравнений можно определить усилия в разрезанных стержнях. Систему трех уравнений равновесия можно свести к трем независимым уравнениям, если эти уравнения составить так, чтобы сумма моментов всех сил, действующих на оставшуюся часть фермы, относительно каждой из трех точек пересечения направлений разрезанных стержней была равна нулю.

Для определения усилия в интересующем нас *j-м* стержне достаточно составить только одно уравнение моментов, взятых относительно точки пересечения двух других стержней. Эта последняя точка называется *моментной точкой* для *j-*го стержня.

На рис. 1.30 показано применение метода сечений при определении усилий в стержнях второй панели фермы. Для определения усилия в стержне 4—6 следует составить условие равенства нулю моментов сил, приложенных по левую сторону от разреза *а—Ь,* относительно точки *А* для определения усилия в стержне 3—5 — относительно точки *В* и для определения усилия в стержне 4—5 — относительно точки С.

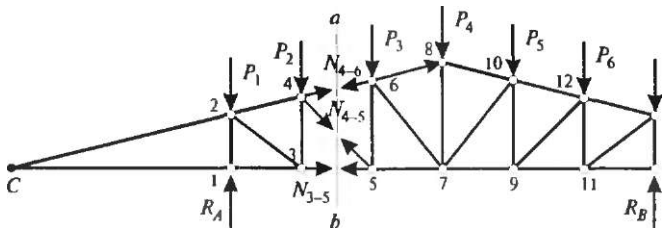


Рис. 1.30

Если два из трех пересеченных стержней параллельны друг другу (рис. 1.31), то моментная точка для третьего стержня уходит в бесконечность. В этом случае составляется условие равенства нулю суммы проекций всех сил, действующих по одну сторону разреза, на направление, перпендикулярное параллельным стержням, попадающим в разрез.

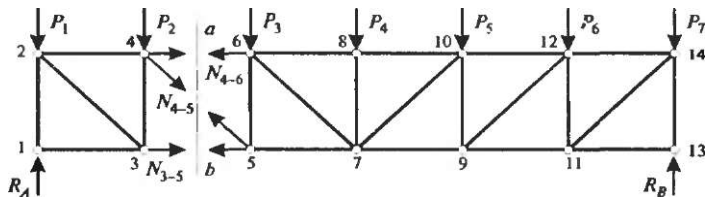


Рис. 1.31

1.15. Линии влияния усилий в фермах

Линии влияния усилий в панелях верхнего и нижнего пояса фермы строятся как линии влияния момента относительно моментной точки с ординатами, деленными на плечо рассматриваемого усилия относительно моментной точки. На протяжении панели, по которой движется груз, производится спрямление линии влияния, как при узловой передаче нагрузок. Таким же образом строятся линии влияния усилий в раскосах и в стойках в случае непараллельных поясов.

Заметим, что обычно сразу указывается, где движется единичный груз, поскольку возможно движение груза как по верхнему, так и по нижнему поясу фермы.

При параллельных поясах линии влияния усилий в раскосах и стойках строятся как линии влияния поперечной силы для верти-

кального сечения, пересекающего раскос или стойку, с ординатами, деленными на sina, где а — угол наклона раскоса; и со спрямлением на длину панели, по которой движется груз.

Рассмотрим четыре характерных примера построения линий влияния для ферм с непараллельными и параллельными поясами (рис. 1.32, а и 1.33, а).

Рассмотрим определение линии влияния А^-з, нижнего пояса фермы с непараллельными поясами.

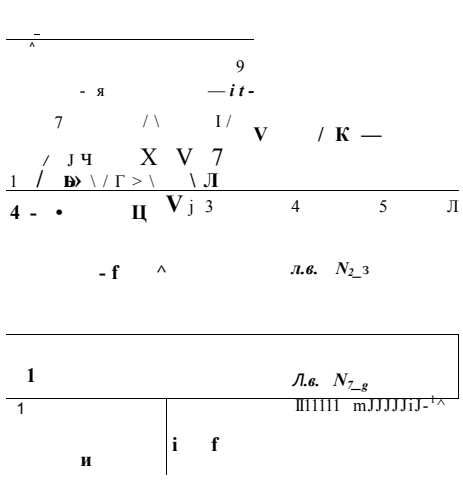


Рис. 1.32

Проведем сечение I—I. Составляем уравнение равновесия всех сил, приложенных к правой части фермы (груз левее сечения I—I) относительно моментной точки 8:

$$I\ M^{\wedge} = R_B(l-a_8) + N_{2_3}\ FC2_3=0,$$

откуда графическое изображение данного выражения является левой ветвью линии влияния рис. 1.32, б.

Аналогично составляется уравнение, когда груз находится правее сечения I—I:

$$ZM^{™} = R_A a_s - N_{2_3} b_{1_3} = 0,$$

откуда $Ni\text{-}з = \frac{R\ o}{h\text{-}г}$ > правая ветвь линии влияния (рис. 1.32, б).

Воспользовавшись правилом построения линий влияния при узловой передаче нагрузки, получим передаточную прямую.

Для определения линии влияния верхнего пояса фермы с непараллельными поясами проводим сечение I—I. Составляем уравнение равновесия всех сил, приложенных к правой части фермы (груз левее сечения I—I) относительно моментной точки 2 :

$$I\ M^{\wedge} = R_B(l-a_2) + N_{7_8}\ Z7_8 = 0,$$

откуда $N_{7_s} = \frac{um}{-R_B(l-a_2)}$.

Графическое изображение данного выражения является левой ветвью линии влияния, показанное на рис. 1.32, *в*.

Аналогично составляется уравнение, когда груз находится правее сечения I—I:

$$ЦМ™ = R_A a_2 - N_{7_8}\ Z>7_8 = 0,$$

откуда A^7_8 = ^ , по которой строится правая ветвь линии влияния (рис. 1.32, *в)*.

Воспользовавшись правилом построения линий влияния при узловой передаче нагрузки, получим передаточную прямую.

Для построения линии влияния Ng^, раскоса фермы с непараллельными поясами проводим сечение I—I. Составляем уравнение равновесия всех сил, приложенных к правой части фермы (груз левее сечения I—I) относительно моментной точки *O :*

$$I\ \boldsymbol{Mq}^{l}{}^{**} = R_B(l + a)\sim N_{S_3}\ V3=0,$$

откуда 7Vg_3 = $\frac{+}{к\text{-}ъ}$, получаем графическое изображение данного выражения, являющегося левой ветвью линии влияния (рис. 1.33, б).

Аналогично составляется уравнение, когда груз находится правее сечения I—I:

откуда 7vg_3 = $\frac{-R_{в}}{ч\text{-}з}$ 7-^$\frac{a}{}$, получаем правую ветвь линии влияния (рис. 1.33, б). Воспользовавшись правилом построения линий влияния при узловой передаче нагрузки, получим передаточную прямую.

Для определения линии влияния N9-4, раскоса фермы с параллельными поясами проводим сечение II—II. Моментная точка в этом случае находится в бесконечности, так как верхний и нижний пояс параллельны. Применим метод проекций. Когда груз P = 1 находится между узлами 4 и 14 (правее панели 3—4) рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 1.33, а). Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\boldsymbol{T.y}^{Me} = \boldsymbol{R_A\text{-}N_{9}}_4 \sin a = 0,$$

откуда = $\frac{\triangle^{A}}{\sin a}$, по данному выражению строим левую ветвь линии влияния (рис. 1.33, *в)*.

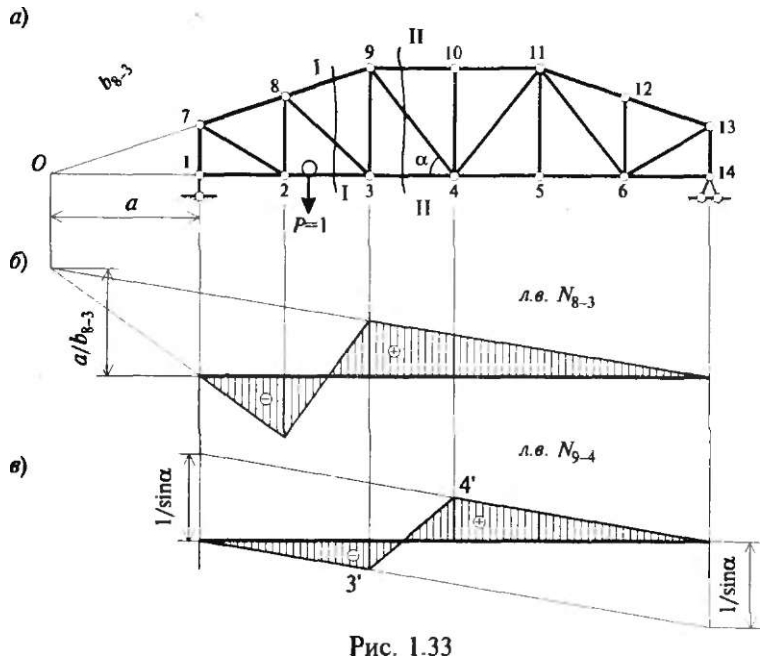


Рис. 1.33

Пусть теперь груз расположен между узлами 1 и 3 (левее панели 3—4), рассматриваем равновесие правой части фермы:

$$^{\wedge}управ = Rb + \qquad \sin a = O\ ($$

откуда $Л^{г}о_4 = \frac{}{\sin a}$, по которому строим правую ветвь линии влияния. Прямая (3'—4') — передаточная прямая.

В заключении рассмотрим пример построения линии влияния в элементе четвертой категории.

Построим линию влияния в стойке V_2 (элемент четвертой категории) фермы с двухъярусными шпренгелями (рис. 1.34, а). Известно, что линия влияния в этом случае может быть построена согласно выражению

$$V_2 = y_2^{\circ} + y_2^{л\ ш} + У\%^{р\ ш},$$

где VF' — линия влияния в основной ферме; V_2^W и $V''^{р,Ш'}$ — линии влияния левого и правого шпренгелей.

При построении линий влияния в элементе V_2 следует провести передаточные прямые (пунктирные линии на рис. 1.34, *г)* при езде

поверху ***(m'n)*** и понизу ***(к'и).*** Затем следует учесть влияние левого и правого шпренгелей (рис. 1.34, ***в).***

На рис. 1.34, *г* это точки *e\ w\ b\ c* расположенные под стойками шпренгелей.

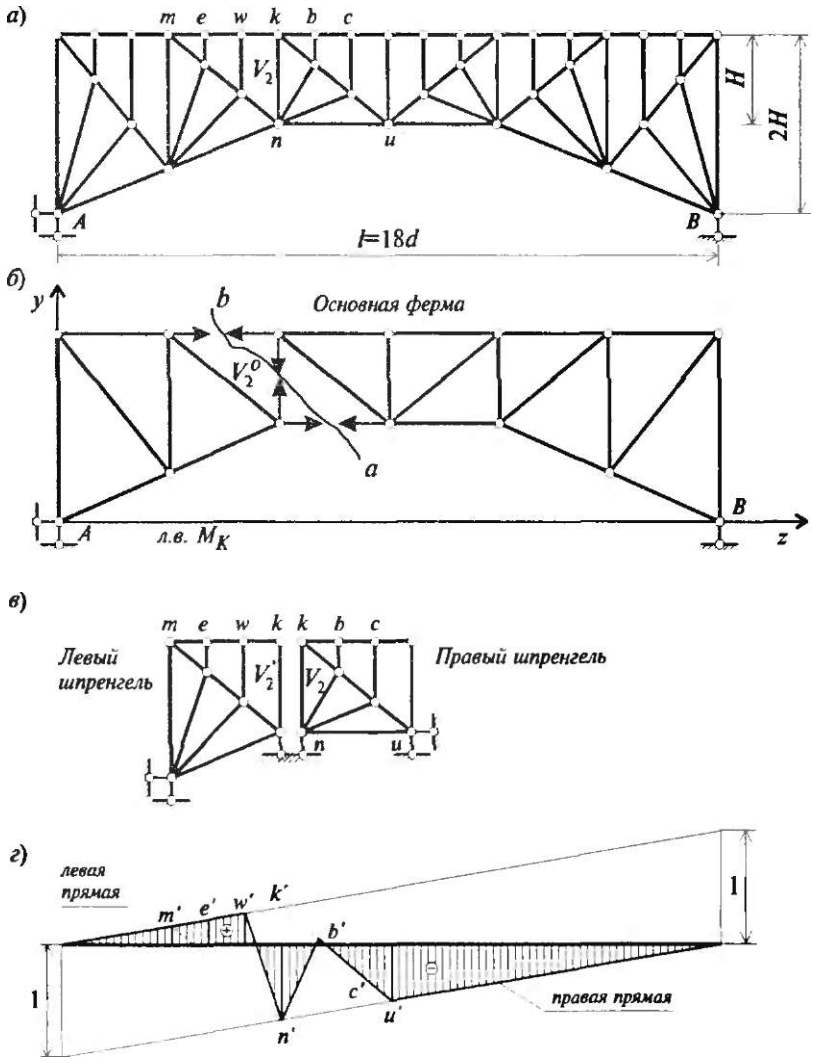


Рис. 1. 34

1.16. Невыгоднейшее загруженне линии влияния. Критический груз

Рассмотрим движение связанной системы сосредоточенных сил, характеризующих собой давление колес поезда по заданной и, в общем случае, полигональной линии влияния (рис. 1.35). Если для каждого из последовательных положений поезда, определяемых координатой ***x,*** вычислять значение усилия ***S,*** то можно построить график зависимости ***S=S(x),*** представляющий собой полигональную линию, изломы которой соответствуют нахождению одного из грузов над одной из вершин линии влияния.

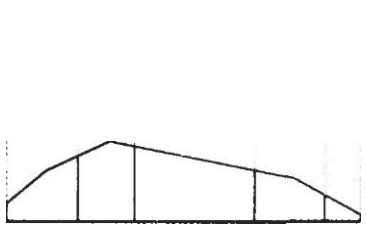


Рис. 1.35

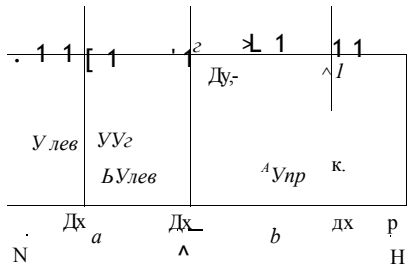


Рис. 1.36

Очевидно, что при некотором значении $x = x_0$ этот график может иметь максимум S_{max}, определяющий наибольшее возможное значение искомого усилия. Ясно, что при $x \quad x_0$ будет иметь место неравенство $S(x) < S_{max}$.

Для полигональной линии влияния и при сосредоточенных силах, эта ситуация реализуется только в том случае, если одна из системы подвижных сил располагается над одной из вершин линии влияния. Этот груз, располагающийся над вершиной линии влияния и доставляющий усилию ***S*** наибольшее возможное значение, принято называть критическим, а соответствующее расположение поезда — невыгоднейшим загружением линии влияния.

Если известно невыгоднейшее загружение линии влияния, то вычисление максимально возможного усилия сводится к формуле:

$$S = I|y_I + P_2\ У2 + \dots + P_u\ У_{„} = I/\}\ У1\ .$$
$$;=1$$

На практике часто встречается случай треугольной линии влияния (рис. 1.36). Расположим поезд таким образом, чтобы один из грузов находился над вершиной линии влияния. Пусть груз Р,- критический, тогда:

$$SFNAX = V^{ME}\ Y^{ME}\text{-} + P_{f\ y/} + У^{П}Р^{АВ}\text{-}У^{П}Р^{АВ}\text{-}\ ^{\wedge} \qquad (1.27)$$

где $V^{Me'}$ и К"/^{0}®- — равнодействующие сил, действующих слева и справа от Pi соответственно.

При сдвиге поезда влево или вправо на расстояние **Ax** * 0 приращение усилия

$$AS=S\text{-}S_{MX}<0.$$

Отсюда имеем

- при сдвиге поезда влево

$$AS = -У^{мв}\text{-}Ау^{мв}\text{-} - P_1\ Д\text{>>},\ + y''рав._{Ay}прав.\ _{<0;} \qquad (j\ _{2g})$$

- при сдвиге поезда вправо

$$AS = V^{\wedge}\text{-}Ay™' - Pj\ Ayj - y''P™_{by}''P<\text{*}\text{-} > o, \qquad (1.29)$$

где Ay_t **= Axtga;** **A**yj **= Axtg(3.**

Учитывая, что $Ay^{Me'} = Ax\ tga = \frac{h}{a}$ и $Ay^{прав}\text{-} = Ax\ tg(3 = \frac{h}{b}$, получим:

- при сдвиге поезда влево

$$\frac{y\,лев.}{a} \quad \frac{p}{b} \quad \frac{„прав.}{}; \qquad (1.30)$$

- при сдвиге поезда вправо

$$y\,лев. \qquad управ._{+}\ p_{_} \qquad (1.31)$$

Таким образом, если для какого-либо груза Pj осуществляется одновременное удовлетворение двух неравенств (1.30) и (1.31), то по определению этот груз является критическим.

В практических задачах приходится иметь дело со строго определенными типами подвижных нагрузок — поездами. Для каждого заданного поезда значение 5_{max} будет определяться лишь положением вершины линии влияния и ее длинойДля каждого типа поезда вычисляют 5_{max} при различных длинах линии влияния с различными положениями вершины треугольника и вводят условную, равномерно распределенную нагрузку <7экв , для которой

$$Snux = 9экв\ ю, \qquad (1.32)$$

эквивалентная равномерно распределенная нагрузка при классе К= 1 и езде по прямолинейному поясу фермы (см. табл. 1.2, при-

чем $\frac{i}{л}$ — длина линии влияния, м; а = $\frac{O}{}$ — положение вершины линии влияния; а — проекция наименьшего расстояния до конца линии влияния, м), ш — площадь линии влияния под грузом $<7_{экв}$.

Таблица 1.2

Эквивалентные нагрузки $д_{эы}$, кН/м, пути при классе К = 1

Длина линии влияния, к, м	а = —= 0 X	а = — = 0.5 X
1	50.00	50.00
5	20.77	18.10
10	17.81	15.58
20	15.05	13.17
30	13.36	11.69
40	12.25	10.72
50	11.51	10.07
60	11.01	10.01
80	10.46	10.00
100	10.20	10.00
120	10.09	10.00
140	10.04	10.00

1.17. Расчет плоской фермы (задача № 5)

Для металлической фермы с размерами и узловыми нагрузками, полученными путем замены собственного веса, равномерно распределенного по всей длине ***q*** = 100 кН/м, высота фермы ***H*** = ***d*** = 2 м, нагрузка на крюке тележки ***Q*** = 500 кН; движение тележки предполагается по нижнему поясу фермы (рис. 1.37), требуется:

1. Определить аналитически усилия V_4, в элементах фермы (рис. 1.37, *в, г).*

2. Построить линии влияния усилий в тех же элементах, определив числовые значения их ординат.

3. Вычислить суммарные (расчетные) усилия в элементах фермы от постоянной нагрузки ***q*** и временной нагрузки ***PQ*** .

4. Загрузить одну линию влияния (по выбору) постоянной нагрузкой ***q,*** определить усилие и сравнить его с полученным в аналитическом расчете по п.1.

l=\Od

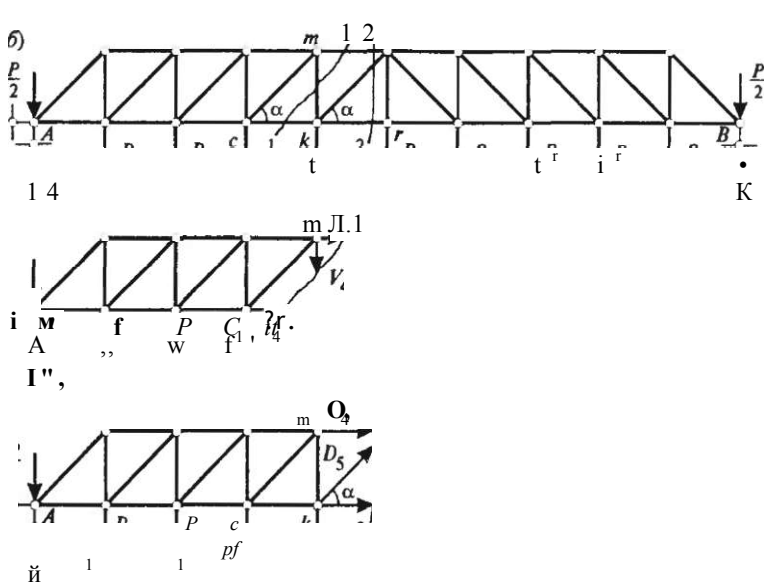


Рис. 1.37

Решение

1. Определение аналитически усилия U4, V_4, D5 в элементах фермы

Учитывая симметрию фермы и постоянное по ее длине значение постоянной нагрузки *q,* имеем

$$P=qd= \quad 100 \quad 2 \quad = \quad 200 \quad \text{кН};$$

$$R_a = R\boldsymbol{B} \qquad = Я^{X} \sim \sim - \; = \; 5 \; P \; = \; ЮООкН.$$

Дарение колес на ось двухосной тележки будет равно

Для вычисления усилий **в** элементах фермы **l/4, V_4,** D_5 предварительно подсчитаем геометрические параметры фермы.

6)

Длина раскоса / = V#^{2} + d^2 =*djl* = 2.828 м.

Синус угла наклона раскоса: sin a = — = - Д = = — = 0.707.
I d j 2 2

Для вычисления усилия в нижнем поясе *Щ* (рис. 1.37, *в)* составим уравнение равновесия моментов относительно точки *m,* т.е. 1 Л / $_т$ = 0 :

$$^{R}A \cdot * d - y \cdot 4 d - P \cdot 3 d - P - 2 d - P \cdot d - U_A H = 0,$$

откуда

$$U_4 = \frac{5P-4d-^--4d-P3d-P2d-Pd}{H} = \frac{IzJLJL -\2P}{d} = 2400 \text{ кН}.$$

Для вычисления усилия в стойке $У_4$ составим уравнение = 0 (рис. 1.37, *в):*

$$R_a---P-P-P-U_A = O,$$

откуда

$$и_4 = 5P - - - P - P - P = 1.5 \cdot P = 1.5 \cdot 200 = 300 \text{ кН}.$$

Для вычисления усилия в раскосе D$ составим уравнение 1 ^ = 0 (рис. 1.37, г):

$$R_A - \frac{P}{} -P-P-P-P + D_5 sina = 0,$$

откуда

$$\frac{RA--^-P-P-P-P}{\sin a} \quad \frac{5 P - 4 . 5 P}{\sin a} \quad \frac{P}{2 \sin a}$$

$$\frac{200}{2 \ 0.707} = -141.4 \text{ кН}.$$

2. *Построение линии влияния усилий U_4, D5 в элементах фермы*

Для построения линии влияния усилия в поясе U_4 расположим единичный груз *P* = 1 справа от сечения 1—1 (рис. 1.38, *а).*

Составив уравнение Y.M$_т$ = 0 (рис. 1.38,6), получим значение ординаты правой прямой линии влияния *Щ* (рис. 1.37, *е).* В нашем случае

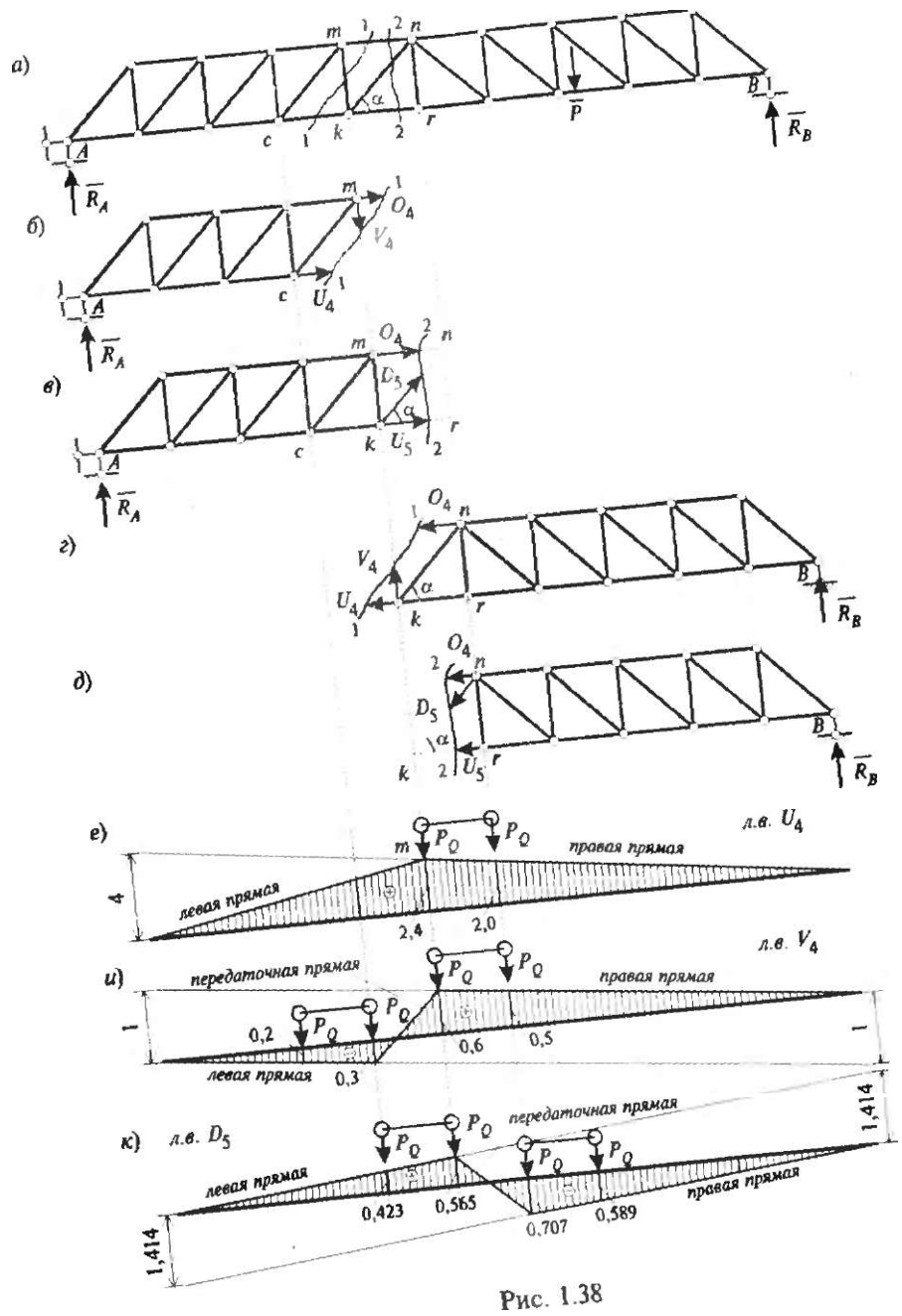

а)
m
1
2
n
α
c
1
k
2
r
P
B
A
R_A
R_B
б)
O_4
V_4
U_4
в)
O_5
D_5
U_5
г)
д)
е)
л.в. U_4
P_Q
левая прямая
правая прямая
4
2,4
2,0
ж)
л.в. V_4
передаточная прямая
0,2
0,6
0,5
0,3
з)
л.в. D_5
1,414
0,423
0,565
0,707
0,589

Рис. 1.38

$$R_A \; I\,d - U\,f\,H = 0,$$

откуда

$$U - \frac{1 \quad W}{}$$

Левую прямую линии влияния £/4 получим, используя известное положение о том, что левая и правая прямые линии влияния в элементе пояса пересекаются под моментной точкой т (рис. 1.38, *е).*

Для вычисления ординат линии влияния в стойке поочередно будем ставить груз P = 1:

- справа от сечения 1—1 (рис. 1.37, б), составив уравнение J^y = 0

или

$$R_a\text{-}H_4 = 0; \quad V_4 = R_A = 1;$$

- слева от сечения 1—1 (рис. 1.37, *г),* составив уравнение *J^y* = 0

или

$$\boldsymbol{RA} + \boldsymbol{П} = 0; \quad V_4 = -R_a = -1.$$

Отметив эти ординаты, получим правую и левую прямые линии влияния $У_4$ (рис. 1.38, и). Между положительной и отрицательной ветвями линии влияния надо провести, так называемую, передаточную прямую. Она пройдет между узлами с и *к* нижнего пояса (рис. 1.38, и).

Для построения линии влияния усилия в раскосе воспользуемся сечением 2—2 (рис. 1.38, *а).*

Рассмотрим груз *P* = 1, приложенный справа от сечения 2—2 (рис. 1.38, ***в)*** и составим уравнение равновесия:

$$Zy = R_A + D_5 \sin a = 0,$$

откуда

$$D_s = -\frac{J\,k}{\sin a} - = \frac{— L}{\sin a} - = \frac{- - 1}{0.707} = = -1414.$$

При действии груза *P* = 1 левее сечения 2—2 (рис. 1.38, *д),* имеем

$$\boldsymbol{Ty} = \boldsymbol{R_B}\sim \quad \boldsymbol{D_5 S}\text{ina} = 0,$$

откуда

$$\sin a \qquad \sin a \qquad 0.707$$

Передаточная прямая пройдет между узлами *к* и *г* нижнего пояса. Линии влияния усилий в элементах фермы *Щ, V_4, Ds* приведены на рис. 1.38, *е,* и, *к.*

*3. Вычисление суммарных усилий в элементах фермы от постоянной нагрузки q и временной нагрузки **PQ***

Загрузим все линии влияния временной нагрузкой в виде перемещающейся по грузовому поясу тележки с давлением на ось ***PQ*** (см. рис. 1.38, *е, и, к).*

Вычислим суммарные усилия в указанных элементах от сочетания постоянной расчетной нагрузки *q* и временной ***PQ.***

Предварительно вычислим из геометрических соотношений ординаты линий влияния, соответствующие невыгоднейшему положению колес тележки. Примем расстояние между осями тележки а = 1 м. При этом ветровые, тормозные и инерционные силы в первом приближении учитывать не будем. Тогда

$$t/_4^{max} = U_4 + P_Q \cdot 2.4 + P_Q \; 2.0 = 2400 + 125 \cdot (2.4 + 2.0) = 2950 \text{ кН}.$$

При вычислении суммарного усилия в элементе необходимо загружать временной нагрузкой положительный и отрицательный участки линии влияния

$$K_4^{max} = V_4 + P_Q \cdot 0.6 + PQ \cdot 0.5 = 300 + 125 \cdot 1.1 = 437.5 \text{ кН};$$

$$K\Gamma^{П} = I\text{-}PQ\text{-}\; 0.3 + PQ \cdot 0.2 = 300 - 125 \cdot 0.5 = 237.5 \text{ кН}.$$

Аналогично и для раскоса

$$DIS''^{3}* = D_5 + P_Q\text{-}\; 0.565 + P_Q \cdot 0.423 = -141.5 + 123.5 = -18 \text{ кН};$$

$$0_5^{тм^{П}} = D_5\text{-}P_Q\text{-}\; 0.707 - P_Q - 0.589 = -141.5 - 162 = -303.5 \text{ кН}.$$

Таким образом, элементы $t/_4$, V_A работают на растяжение, а D$ на сжатие.

4. *Загружение линии влияния постоянной нагрузкой q*

Загрузим линию влияния ***Щ*** постоянной нафузкой ***q*** и вычислим усилие $C/_4$ с применением линии влияния. В этом случае

$$U_4 = q(a = 100\ 0.5\text{-}2.4\text{10.2} = 2400 \text{ кН},$$

где ю = 0.5-2.4-10.2 — площадь линии влияния усилия 64 (рис. 1.38, *е).*

Таким образом, значение усилия в элементе Щ, вычисленное аналитически (см. п.1) и по линии влияния, полностью совпадают.

1.18. Расчет шпренгельной фермы на постоянную и временную нагрузку (задача № 6)

Для шпренгельной фермы с размерами и узловыми нагрузками, полученными путем замены собственного веса, равномерно распределенного по всей длине фермы (рис. 1.39, *а),* требуется:

1. Определить усилия в стержнях шпренгельной фермы от собственного веса фермы q = 40 кН/м аналитическим способом.
2. Построить линии влияния усилий в элементах шпренгельной фермы.
3. Вычислить максимальное усилие в элементе пояса при загружении его линии влияния заданной временной нагрузкой от железнодорожного подвижного состава класса К- 10.
4. Определить то же усилие, что и в п.3, с помощью загружения линии влияния эквивалентной нагрузкой класса *К.* Сравнить результаты, полученные в пп. 3 и 4.
5. Определить усилие в раскосе *D* с помощью загружения его линии влияния собственным весом фермы q = 40 кН/м и сравнить с результатом, полученным в п.1.

Решение

1. Определение усилий в стержнях шпренгельной фермы от собственного веса фермы q = 40 кН/м *аналитическим способом*

Равномерно распределенную нагрузку от собственного веса фермы приведем к узловой. Тогда во всех промежуточных узлах заданной фермы будет передаваться узловая нагрузка P- qd = = 40-5 = 200 кН. А на опорные узлы нагрузка = = 100 кН.

Основная ферма (без шпренгелей) и узловая нагрузка, приложенная к ней, показаны на рис. 1.39, б.

Из условия симметрии опорные реакции равны

$$\bar{R}A = {}^{-}Rb = \text{-}J\text{-} = \frac{12P}{2} = \frac{12\text{-}200}{2} = {}^{10ПП}{}_{1200кН}{}^{д}\text{-}$$

Аналитически усилия в стержнях фермы определяют при помощи метода сечений.

Дополнительные шпренгельные фермы (шпренгели), изображенные на рис. 1.39, *а,* передают местную вертикальную нагрузку, приложенную к нижним дополнительным узлам, только в нижние узлы основной фермы. Такие шпренгели называются одноярусны-

ми. Элементы ферм, в состав которых входят одноярусные шпренгели, можно разделить на следующие три категории:

1) элементы, принадлежащие только основной ферме. Усилия в этих элементах определяются расчетом основной фермы;

2) элементы, принадлежащие только дополнительным шпренгельным фермам (шпренгелям). Усилия в них определяются из условий равновесия, составляемых для отдельных частей шпренгеля, который при этом можно рассматривать как самостоятельную двухопорную ферму (рис. 1.39, *г);*

3) элементы, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю.

Усилия в таких элементах равны сумме двух усилий, одно из которых возникает в элементе основной фермы, а другое — в элементе шпренгеля.

Встречаются шпренгельные фермы, в состав которых входят двухъярусные шпренгели. Отличительная особенность двухъярусных шпренгелей состоит в том, что они узловую нагрузку, приложенную к нижнему поясу, передают в узлы верхнего пояса или, наоборот, — с верхнего пояса на нижний. Элементы таких шпренгельных ферм делятся на четыре категории: первые три те же, что и для ферм с одноярусными шпренгелями; элементами четвертой категории являются те элементы основной фермы, линии влияния для которых имеют различный вид при езде поверху и при езде понизу. Расчет ферм с двухъярусными шпренгелями проводится с учетом этой особенности и подробно рассмотрен в учебнике [4].

Для определения усилия 0_2 в стержне 4—6 заданной фермы, являющимся элементом первой категории, проведем в основной ферме сечение I—I. Моментной точкой для определяемого усилия является точка 4' (рис. 1.39, б). Составив уравнение равновесия левой отсеченной части фермы $\pounds M_{4'} = 0$, получим

$$R_A.4d\text{-}P\text{-}4d\text{-}2P\text{-}ld + 0_2 \quad H = 0,$$

откуда

$$\ddot{0}2 = \frac{Rt\text{-}bd\text{-}P\text{-}Ad\text{-}lP\text{-}ld}{-} = \frac{(1200 \cdot 4 - 200 \cdot 4 - 2 \cdot 200 \cdot 2) \cdot 5}{-} =$$

$$= 1600 \text{ кН}.$$

Усилие Z>i в раскосе 4'—5, элементе третьей категории, определяем как сумму двух усилий, одно из которых D\ действует в элементе основной фермы, а другое Df'' — в элементе шпренгеля.

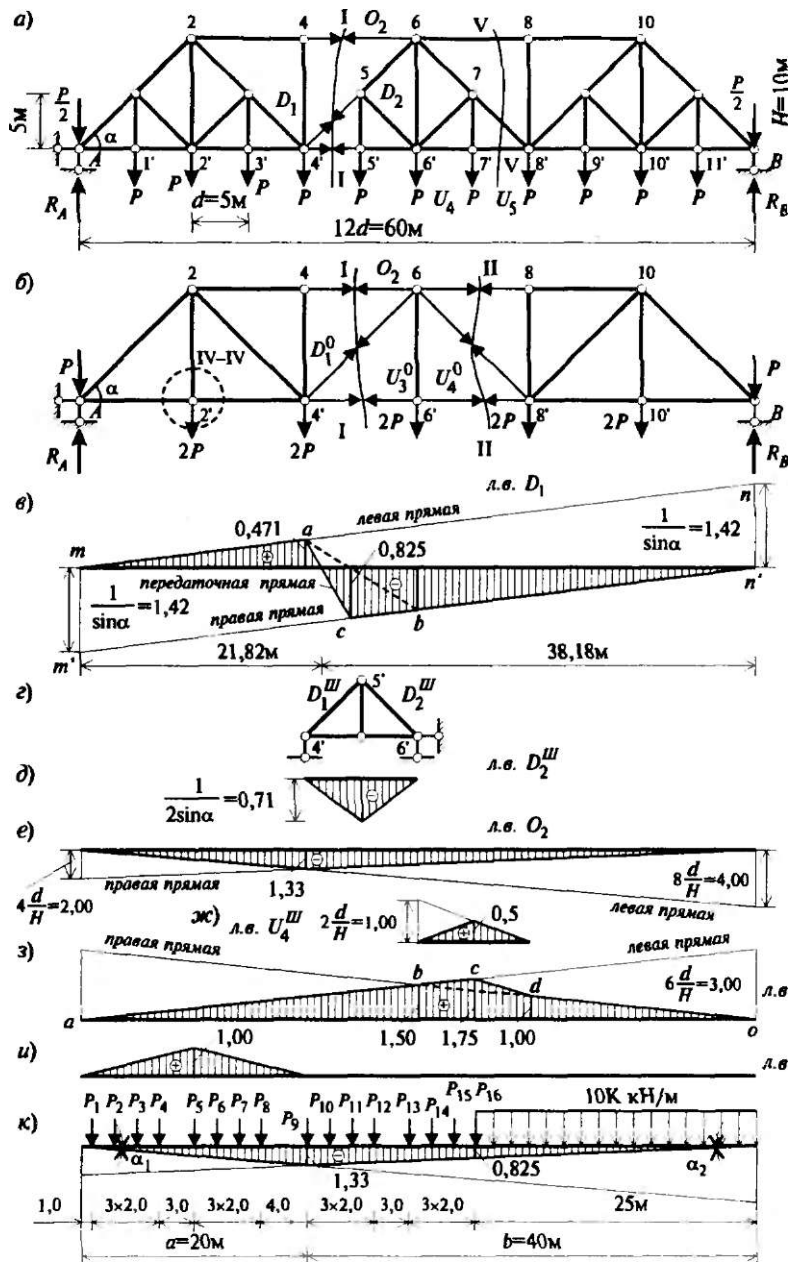

а)
2
4
I
O_2
6
V
8
10
5
7
D_1
D_2
$\frac{P}{2}$
5м
H=10м
α
A
B
1'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
8'
9'
10'
11'
P
U_4
U_5
R_A
R_B
d=5м
12d=60м
б)
II
IV–IV
D_1^0
U_3^0
U_4^0
2P
в)
л.в. D_1
0,471
a
левая прямая
0,825
$\frac{1}{\sin\alpha}$=1,42
передаточная прямая
правая прямая
m
n
m'
n'
c
b
21,82м
38,18м
г)
D_1^{III}
D_2^{III}
д)
л.в. D_2^{III}
$\frac{1}{2\sin\alpha}$=0,71
е)
л.в. O_2
правая прямая
1,33
$4\frac{d}{H}$=2,00
$8\frac{d}{H}$=4,00
ж)
л.в. U_4^{III}
$2\frac{d}{H}$=1,00
0,5
з)
$6\frac{d}{H}$=3,00
л.в
1,00
1,50
1,75
1,00
и)
к)
P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11} P_{12} P_{13} P_{14} P_{15} P_{16}
10К кН/м
α_1
α_2
1,33
0,825
25м
1,0
3×2,0
3,0
3×2,0
4,0
3×2,0
3,0
3×2,0
a=20м
b=40м

Рис. 1.39

Усилие *Dp* стержня 4'—6 основной фермы находим из уравнения равновесия E>>=0 левой отсеченной части фермы (сечение I—I):

$$R_A - P - 2P + DP \sin a = 0; \qquad W = \frac{5P - R_A}{\sin a} = \frac{5\ 200 - 1200}{V2/2} = -284 \text{ кН},$$

где a = 45°.

Выделим шпренгель из заданной фермы и определим усилие Df в раскосе 4'—5 (рис. 1.39). Проведя сечение *а—а,* составим уравнение равновесия £ *y* = 0 левой отсеченной части шпренгеля:

$$1 \sin a + \frac{}{2} = 0,$$

$$2 \sin a \text{ -= -142 кН.}$$

Таким образом, усилие D_1 в раскосе 4'—5 равно

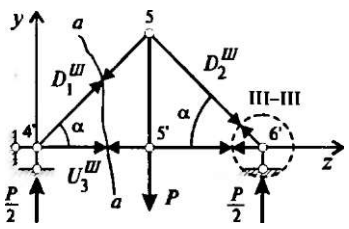


Рис. 1.40

$$D_1 = \pounds>]^{III} + DP = -142 - 284 = -426 \text{ кН}.$$

Для определения усилия U% в нижнем поясе 6'—7', элементе третьей категории, проведем в основной ферме сечение II—II. Моментной точкой (рис. 1.39, *6)* для определяемого усилия является точка 6. Составив уравнение равновесия правой отсеченной части фермы Ел/б = 0, получим:

$$-R_B \cdot 6d + P \cdot 6d + 2P \cdot 4d + 2P \cdot 2d + U\%H = Q,$$

$$\text{C/4} = \frac{1200 \cdot 6 \cdot 5 - 200 \cdot 6 \cdot 5 - 2 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 200 \cdot 2 \cdot 5}{\text{—}} = 1800 \text{ кН}.$$

Чтобы найти усилие И% в нижнем поясе 6'—7' шпренгеля, проведем сечение *а—а* (рис. 1.41). Составив и решив уравнение равновесия левой отсеченной части шпренгеля ЕЛ/7 = 0. получим:

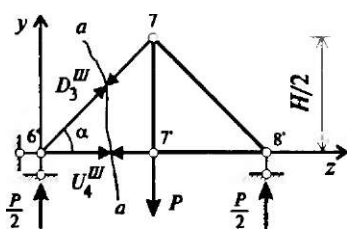


Рис. 1.41

$$2$$

$$\text{Uf} = \text{P-}\frac{d}{H} = 200\frac{}{10} = 100 \text{ кН}.$$

Таким образом, суммарное усилие Щ в элементе б'—Т нижнего пояса

$$Щ = U f + U\% = 1800 + 100 = 1900 \text{ кН}.$$

Усилие D2 в раскосе 5-6', элементе второй категории, определяем из условия равновесия $\Sigma Ly = 0$ узла 6', вырезанного сечением III—III (см. рис. 1.40):

$$£>2 \sin a + \frac{}{2} = 0; \quad D? = \frac{-}{2 \sin a} = -142 \text{кН}.$$

Для определения усилия V\ в стойке 2—2', элементе первой категории, вырежем узел 2' в основной ферме (см. рис. 1.39, б, сечение IV—ГУ) и составим уравнение его равновесия = 0:

$$V_x \quad -2-P=0.$$

Решив это уравнение, получим $V_x — 2P = 2\text{-}200 = 400$ кН.

2. *Построение линий влияния усилий в элементах шпренгельной фермы*

Груз P = 1 перемещается по нижнему поясу фермы. Для построения линии влияния усилия *D* в раскосе 4'—5, элементе третьей категории, воспользуемся сечением I—I (см. рис. 1.39, *а).* Если груз находится справа от сечения, то уравнение правой прямой линии влияния усилия D\ находим из условия равновесия левой отсеченной части фермы:

$$\Sigma У''^{*} = 0; \quad R_A + I\backslash \sin a = 0; \quad I\backslash = \quad \text{(правая прямая)}.$$

Рассмотрим второй случай, когда груз P= 1 находится слева от сечения. Тогда уравнение левой прямой линии влияния усилия *D* определим из условия равновесия правой отсеченной части фермы:

$$x\Sigma У^{ПРОВ} = o; \quad R_B - A \sin a = 0; \quad Д = \frac{D}{\sin a} \quad \text{(левая прямая)}.$$

Уравнения прямых линии влияния усилия Df могут быть получены умножением ординат линии влияния опорной реакции R_A на постоянный коэффициент -1/sina, а левая прямая — умножением ординат линии влияния опорной реакции Rg на коэффициент 1/sina.

Для построения правой прямой линии влияния усилия $D°$ на левой опорной вертикали откладываем от оси отсчета вниз ординату -1/sina и соединяем ее вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали (прямая т'п на рис. 1.39, *в).* Для построения левой прямой откладываем вверх ординату 1/sina на правой опорной вертикали, вершину которой соединяем с нулевой точкой левой опорной вертикали (прямая тп' на рис. 1.39, *в).* Для учета узловой передачи нагрузки левый узел 4' сносим на левую прямую, а правый узел 5' — на правую прямую. Полученные точки *а и с* соединяем прямой, называемой передаточной. Пунктирной линией показана передаточная прямая аЪ линии влияния усилия D\ в раскосе 4'—6 основной фермы (рис. 1.39, *в).* Линия влияния усилия Df в раскосе 4'—5 шпренгеля идентична линии влияния усилия раскоса 6'—5 (см. рис. 1.39, *д).*

Алгебраическая сумма линий влияния усилий *D?* и *Df"* образует линию влияния усилия *Di* (рис. 1.39, *в).* При этом треугольник *abc* представляет линию влияния усилия *Df".*

При построении линии влияния усилия $\boldsymbol{0_2}$ в стержне 4 — верхнего пояса, элементе первой категории, проведем сечение I—I в основной ферме (см. рис. 1.39, б).

Рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы, когда груз P = 1 находится справа от сечения. Для этого составим уравнение равновесия:

$$\boldsymbol{ZMFF^*} = 0;\quad \boldsymbol{R}_a \bullet \boldsymbol{4d} + \phi\ \boldsymbol{H} = 0;\quad \boldsymbol{0_2} = -\frac{4\,d}{H}\boldsymbol{R_A} \qquad \text{(правая прямая).}$$

При P- 1 слева от сечения составим уравнение равновесия правой отсеченной части фермы:

$$\boldsymbol{ZMZ?^*} - \boldsymbol{=0}\backslash R_B \quad Sd + \boldsymbol{02H} = 0;\qquad \boldsymbol{0_2} = -\sim\ \boldsymbol{R_B} \qquad \text{(левая прямая).}$$

Полученные уравнения позволяют построить правую и левую прямые линии влияния усилия $\boldsymbol{0_2}$. При этом они должны пересекаться под моментной точкой 4' (см.рис. 1.39, *е).*

Для построения линии влияния усилия Щ в стержне 6'—7' нижнего пояса, элементе третьей категории, вначале проведем сечение II—II в основной ферме и построим линию влияния усилия U% в стержне 6'—8' нижнего пояса основной фермы. Составив и решив

уравнение равновесия левой отсеченной части фермы £ = 0, когда груз P= 1 находится справа от сечения, получим уравнение правой прямой линии влияния:

$$R_A \cdot 6d - Ui\ H = 0; \quad U\% = \frac{\sim Я_A}{H} \qquad \text{(правая прямая).}$$

Рассматривая равновесие правой отсеченной части основной фермы £ M**"' = 0 при грузе P — 1, расположенном слева от сечения, получим уравнение левой прямой линии влияния:

$$R_B \cdot 6d + U\% H = 0; \quad U^{\wedge} = \frac{\sim R_B}{я} \qquad \text{(левая прямая).}$$

Построив правую и левую прямые (они должны обязательно пересекаться под моментной т. 6), получим линию влияния усилия Щ (см. рис. 1.39, з). Она имеет вид равнобедренного треугольника с положительной ординатой в вершине, равной 3d/H= 1.5.

К полученной линии влияния Щ в основной ферме следует прибавить усилия в пределах панели 6'—Т шпренгеля, изображенную на рис. 1.39, ж. Линия влияния усилия Щ для заданной (шпренгельной) фермы изображена на рис. 1.39, *з.* Здесь треугольник *bed* является линией влияния усилия в стержне шпренгеля 6'—7".

Теперь построим линию влияния усилия У\ в стойке 2—2'. Стойка — элемент первой категории. Поэтому для построения линии влияния усилия в ней следует рассматривать только основную ферму (см. рис. 1.39, б). Вырезав узел 2" основной фермы (см. сечение IV—IV на рис. 1.39, б), составим для него уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось = 0.

При приложении нагрузки P= 1 в узле 2', получим

$$V\,i - P = 0 \setminus \qquad K, = />= 1.0.$$

Если груз $P = 1$ расположен в узлах A или 4' основной фермы, то уравнение равновесия примет вид: = 0.

Отложив под узлом 2' ординату (вверх), равную 1, и соединив ее вершину с нулевыми точками под узлами A и 4' прямыми, получим линию влияния усилия V\ стойки 2—2' (см. рис. 1.39, и). Она имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной единице. Положительный знак указывает на то, что стойка работает на растяжение.

3. *Расчет максимального усилия в элементе пояса при загружении его линии влияния заданной временной нагрузкой от железнодорожного подвижного состава класса К = 10*

Для определения опасного положения нагрузки на линии влияния, имеющей вид треугольника, как известно, необходимо удовлетворение двух неравенств

$$ZP^{Jiee}{}_{+}P_{Kp.} > Z,Pj; \tag{1.33}$$

$$ZP^{jKe} < ?,Pj, \tag{1.34}$$

где £ P^{Me}, — сумма грузов, расположенных левее $P_{кр}$; $P_{кр}$ — критический груз, установленный над вершиной линии влияния; ЪР — общий вес грузов, устанавливающихся в пределах линии влияния; а — проекция наименьшего расстояния от вершины до левого конца линии влияния (при движении поезда справа налево); I — длина линии влияния.

Для вычисления максимального усилия 02тах в стержне 4—6 верхнего пояса (см. рис. 1.39, *к)* от заданной поездной нагрузки класса *К*= 10 вначале найдем невыгоднейшее загружение линии влияния. С этой целью установим, какой из грузов будет критическим.

Предположим, что груз *Р%* расположен над вершиной линии ***ВЛИЯНИЯ.*** Так как ***А*** < *Ь, нагрузку от* железнодорожного подвижного состава надвигаем справа налево. Тогда общий вес грузов, устанавливающихся на линии влияния / = 60 м, составит

$$ZP = R = 16 - 25^{*} + 21 - 10^{*} = 16 \cdot 25 - 10 + 21 - 10 - 10 = 6100 \text{ кН}.$$

Подсчитаем левые и правые части неравенств (1.33) и (1.34):

$$^{}_{p}{}^{}_{лев.} = {}_{7}.25K = 7\text{-}25 \quad 10 = 1750 \text{ кН};$$

$$I\,P^{jKe} + P_{кр} = 1750 + 250 = 2000 \text{ кН};$$

$$£\,P \;/ = 6100 - \frac{^{}}{60} = 2033.33 \text{ кН}.$$

Откуда следует, что неравенства (1.33) и (1.34) не удовлетворяются. Поэтому груз *Pg* не является критическим, а данное загружение не будет невыгоднейшим.

Теперь предположим, что груз *P$* располагается над вершиной линии влияния. В этом случае

$$Y.P = R = 16\text{-}25K + 25\ \ 10K = 16\text{-}25\ \ 10 + 25\ \ 10\ \ 10 = 6500 \text{ кН};$$

$$\pounds P^{TM} \bullet = 8\text{-}25\text{^} = 8\text{-}25\text{-}10 = 2000\text{кН}; \qquad P\text{^} = 250 \text{ кН};$$

$$ZP^{jKe}\text{-} + P_{кр} = 8\text{-}25\ K + 25\ K = 8\text{-}25\text{-}10 + 25\text{-}10 = 2250 \text{ кН};$$

$$\text{Т}\frac{P}{\text{^}\ /} = 6500\,\text{^}\,\underset{\mathbf{60}}{} = 2166.67 \text{ кН}.$$

Таким образом, $I P^{jKe}\sim + P_{кр} = 2250 > 2166.67$ кН;

$= 2000 < 2166.67$ кН.

Оба неравенства удовлетворяются. Следовательно, груз *P<)* является критическим, а загружение невыгоднейшим. Положение нагрузки, соответствующее невыгоднейшему загружению линии влияния усилия *Oj,* показано на рис. 1.39, *к.* Наибольшее усилие 02тах в этом элементе, соответствующее невыгоднейшему загружению, определим по формуле:

$$\mathbf{max = 1\ Ъ\ \text{^} + К п/с},$$

где *Pi* — вес каждого сосредоточенного груза заданной нагрузки; ТЛ/ — значение ординат линии влияния под каждым сосредоточенным грузом; (й/с - площадь участка линии влияния под равномерно распределенной нагрузкой.

Значения ординат под каждым сосредоточенным грузом при тангенсах углов наклона левой и правой прямых линии влияния усилия *Oj*

$$\text{tg}\,a_1 = \frac{}{H\ Aid}\text{г} = \frac{}{10\text{-}12} = -0.066,$$

$$\text{tg}\,a_2 = \frac{\overline{4\,d}}{H\ \text{-tr}\frac{}{\backslash 2d}} = \frac{4\,d}{10\text{-}12} = -0.0333$$

приведены в табл. 1.3.

Площадь участка линии влияния под равномерно распределенной нагрузкой равна

$= |\text{Л}16\ '\ 25 = \text{I} - (-0.825) \bullet 25 = -10.3$ м.

Итак,

$$02\,\mathbf{max} = 250 \cdot (-13.068) + 100 \cdot (10.3) = -4298\ \text{кН}.$$

Таблица 1.3

Номер груза, *i*	Расстояние до левой или правой опоры фермы, /,	Значение tga* для левой ветви	Значение tga* для правой ветви	Ч/ = *I*,itga*
1	1	-0.066		-0.066
2	3	-0.066		-0.198
3	5	-0.066		-0.333
4	7	-0.066		-0.462
5	10	-0.066		*0.666*
6	12	-0.066		-0.792
7	14	-0.066		-0.924
8	16	-0.066		-1.056
9	20	-0.066		-1.320
10	38		-0.033	-1.254
11	36		-0.033	-1.188
12	34		-0.033	-1.122
13	31		-0.033	-1.023
14	29		-0.033	-0.957
15	27		-0.033	0.891
16	25		-0.033	0.825
		Итого:	Zti,=	-13.068

4. *Определение усилий в элементе верхнего пояса 0^ с помощью загружения его линии влияния эквивалентной нагрузкой класса К. Сравнить результаты, полученные в пп. 3 и* 4

Процесс определения невыгоднейшего положения поездной нагрузки и последующего вычисления наибольших расчетных значений усилий с помощью линий влияния их является довольно громоздким и *трудоемким. Этот* процесс может быть упрощен благодаря использованию таблицы эквивалентных нагрузок (табл. 1.3).

Вычислим эквивалентную нагрузку для данной линии влияния по указанной таблице и сравним ее с полученной. Положение вершины линии влияния определяется соотношением

$$a = \frac{\mathbf{a}}{X} = \frac{\mathbf{20}}{60} = 0.333 ,$$

где а — проекция наименьшего расстояния от вершины до конца линии влияния, а = 20 м.

Величину эквивалентной нагрузки при классе К= 1 найдем интерполяцией. При X = 60 м и а = 0, $д_{экв}$, = 11.01 кН/м; при X = = 60 м и а = 0.5, $д_{жв_}$ = 10.00 кН/м.

Интерполируя по а, при а = 0.333, получим

$$Яэкв. = Ю.00 + 0.167 \frac{1101 - 1QQ0}{\sim 5} = 10.00 + 0.34 = 10.34 \text{ кН/м}.$$

Умножив это значение на класс заданной нагрузки К= 10, определим значение эквивалентной нагрузки $д_{экв}$ = 10.34 10 = = 103.4 кН/м.

Используя полученное значение эквивалентной нагрузки, вычислим величину усилия в элементе верхнего пояса по формуле

$$\mathbf{0_2} = ю_{\mathbf{m}} д_{\mathbf{экв.}} = 1\text{-}33\text{-}60\text{-}10.34/2 = 4126 \text{ кН},$$

где а>2 - площадь всей линии влияния $\mathbf{0_2}$.

Сравнение величин усилия $\mathbf{0_2}$, полученных аналитическим способом и по эквивалентной нагрузке, показывает, что погрешность составит

$$g _ \frac{4298 - 4126}{4126} 10Q\% = 4\ 2\%$$

5. *Определение усилий в раскосе D\ с помощью загружения его линии влияния собственным весом фермы q* — 40 кН/м *и сравнить с результатом, полученным в п. 1*

Загрузив линию влияния *D* равномерно распределенной нагрузкой *g* = 40 кН/м, усилие в этом элементе вычисляем по формуле *D\ = g (ŭ-tga,* где

$$co = oj\dot{j} — _1 = \frac{0.471\text{-}21.82}{2} \quad \frac{0.825 \cdot 38.18}{2} = 5.1386\text{-}15.7493 = -10.611 \text{м}.$$

Тогда Dx = 40 (-10.611) = -424.34 кН.

Сравнение значений усилий D\ , полученных двумя способами показывает, что погрешность составит

$$5 = \frac{426 - 424.34}{424.34} 100\% = 0\ 37\%$$

Таким образом, результаты вычислений практически совпадают.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные задачи предмета строительной механики.
2. Дайте определение плоских и пространственных систем сооветственно.
3. Перечислите две основные категории этой дисциплины и дайте соответствующие пояснения.
4. Дайте определение линейных, физически и геометрически нелинейных задач соответственно.
5. Дайте определение статических и динамических задач механики инженерных конструкций соответственно.
6. Раскройте суть механики живучести систем.
7. Дайте определение стержня, оболочки и пластины как геометрической формы.
8. Перечислите основные виды внешних и внутренних характеров закрепления.
9. Перечислите все три группы уравнения механики инженерных конструкций.
10. Сформулируйте принцип независимости действия сил.
11. Дайте определение геометрической неизменяемости заданной системы.
12. Дайте определение статически определимых систем.
13. Дайте определение линии влияния.
14. Какие задачи можно решать с применением линий влияния?
15. Дайте определение матрицы влияния усилий.
16. Дайте определение трехшарнирной арки и рамы соответствено.
17. Дайте пояснения, что такое распор?
18. Какие стержневые системы называются фермами?
19. Какие системы называются балочными и консольно-балочными плоскими фермами?
20. Перечислите основные методы расчета статически определимых ферм.
21. Что такое критический груз и эквивалентная нагрузка соответственно?
22. Поясните, что такое шпренгельная ферма?
23. Что представляют собой ординаты линии влияния?
24. Какие методы применяются при построении линий влияния?
25. Какой вид имеют линии влияния опорных реакций в шарнирно опертой балке?
26. Какой вид имеют линии влияния M и Q в сечениях консольной балки?
27. Какой вид имеют линии влияния M и Q в сечениях однопролетной шарнирно опертой балке?
28. Как построить линии влияния усилий в сечении трехшарнирной арки (рамы) способом наложения?
29. Что называют нулевыми точками в трехшарнирных арках, рамах и как их найти?
30. Как найти аналитическим способом критическую силу при загружении линии влияния треугольного вида системой сосредоточенных сил?

ГЛАВА 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. Статически неопределимые стержневые системы

Статически неопределимой называют такую систему, которая не может быть рассчитана по методу сечений с использованием лишь одних условий равновесия, так как она обладает лишними связями. В качестве лишних следует принимать те связи, которые необходимо отбросить из состава заданной, чтобы превратить ее в статически определимую и геометрически неизменяемую систему.

Количество *лишних связей,* которые следует удалить из статически неопределимой системы для обращения ее в статически определимую и геометрически неизменяемую, называют *степенью статической неопределимости.*

Следует различать *внешне статически неопределимые* и *внутренне статически неопределимые системы.*

Внешне статически не о предел им ой называют такую систему, которая имеет только лишние внешние связи, т.е. лишние опорные закрепления. Примером внешне статически неопределимой плоской системы является трехпролетная рама (рис. 2.1).

Рис. 2.1

Степень статической неопределимости системы С легко установить путем вычитания из общего числа опорных стержней т число стержней, необходимых для сохранения геометрически неизменяемого прикрепления системы (одно — для одномерных; три — для плоских и шесть — для пространственных систем).

Для плоской рамы, изображенной на рис. 2.1, учитывая, что защемление эквивалентно трем опорным стержням, получаем

$$т = 3 + 2\text{-}2 + 1 = 8; \qquad C = т - 3 = 8\text{-}3 = 5,$$

т.е. данная система 5 раз статически неопределима.

Внутренне статически неопределимой называют систему, обладающую лишними связями, введенными для взаимного соединения частей системы.

Двухопорная рама с затяжкой (рис. 2.2, *а)* внутренне один раз статически неопределимой. Статически определимая система (рис. 2.2, ***б)*** получена из заданной (рис. 2.2, а) путем разрезания затяжки *ab.* И при этом взаимодействие частей затяжки заменяется только одной неизвестной осевой силой *N* . Следовательно, в статически определимой системе, изображенной на рис. 2.2, б, имеем одно лишнее неизвестное N\ , которое невозможно определить при помощи метода сечений. Поэтому заданная система (рис. 2.2, *а)* является один раз статически неопределимой.

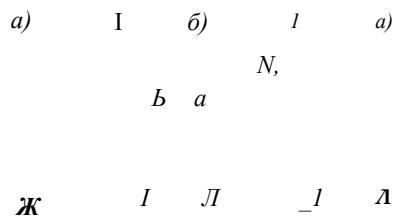


Рис. 2.2

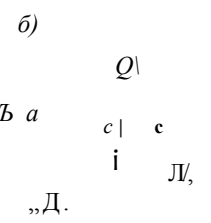


Рис. 2.3

Если затяжку жестко заделать в стойки, как это показано на рис. 2.3, а, то получим трижды статически неопределимую систему.

Действительно, в данном случае после разрезания нижнего ригеля *ab,* взаимодействие частей *ac* и *be* характеризуется уже тремя неизвестными усилиями *N\, Q\, Mi* (рис. 2.3, б), которые нельзя определить из условия равновесия. Поэтому система, изображенная на рис. 2.3, *а,* является три раза внутренне статически неопределимой.

Отсюда можно сделать вывод, что в плоских системах, замкнутый бесшарнирный контур имеет три лишние связи. Следовательно, если плоская система содержит п замкнутых контуров, то она, очевидно, будет 3-я раз статически неопределима.

Отметим следующие основные свойства статически неопределимых систем.

Статически неопределимые системы ввиду наличия добавочных лишних связей, по сравнению с соответствующей статически определимой системой, оказываются более жесткими, а при идентичном характере нагружения значения усилий получаются меньшими. Следовательно, и более экономичными.

Разрушение лишних связей в нагруженном состоянии не ведет к разрушению всей системы в целом, так как удаление этих связей приводит к новой, геометрически неизменяемой системе, в то вре-

мя как потеря связи в статически определимой системе приводит к изменяемой системе.

В строительной механике различают следующие два классических метода расчета статически неопределимых систем; *метод сил к метод перемещений.*

При расчете по *методу сил* основными искомыми величинами являются усилия в лишних связях. Знание усилий в лишних связях позволит по методу сечений, как это было показано в первом разделе учебника, выполнять полный расчет по определению усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов заданной системы.

При расчете по *методу перемещений* основными искомыми величинами являются перемещения узловых точек, вызванные деформацией системы. Знание этих перемещений необходимо и достаточно для определения всех внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов, заданной системы.

2.2. Определение перемещений в стержневой системе

При расчете статически неопределимых систем, кроме уравнений равновесия, как известно, приходится составлять и решать уравнения совместности деформаций системы. Для составления таких уравнений необходимо уметь определять перемещения заданной системы. Это приходится часто делать и при расчете статически определимых систем, которые должны обладать не только достаточной прочностью, но и жесткостью, так как в процессе их эксплуатации нормируются не только напряжения, но и перемещения конструкций.

Таким образом, изучение общих методов определения перемещений упругих систем является одной из основных задач строительной механики.

При определении перемещений заданной системы очень важным является понятие *работы внешних сил на возможных перемещениях,* которая при их статическом действии на сооружение равна сумме половины произведения значения этих сил на величину соответствующего им перемещения. Работа внешних сил на вызванных ими перемещениях может быть выражена через внутренние усилия (изгибающие моменты, продольные и поперечные силы), возникающие в поперечных сечениях стержней конструкции. На этом основан один из наиболее распространенных способов определения перемещений — способ, предложенный немецким ученым О. Мором в 1874г.

Пусть рассматриваемая заданная стержневая система под влиянием внешнего воздействия деформируется и требуется определить

обобщенное перемещение в 1-й произвольной точке (рис. 2.4) в заранее заданном направлении.

Согласно принципу возможных перемещений, для закрепленной системы с идеальными связями, сумма работ всех усилий на любых малых возможных перемещениях равна нулю, что является необходимым и достаточным условием нахождения равновесного состояния рассматриваемой системы. Для деформируемой системы, в аналитическом выражении начала возможных перемещений, следует учесть работу как внешних, так и внутренних усилий.

Рассмотрим два состояния системы: одно, возникающее под действием заданной нагрузки (рис. 2.4, а); второе — под действием единичной силы, приложенной в интересующей нас точке / по направлению искомого перемещения (рис. 2.4, б). Определим возможную работу сил второго состояния на перемещениях первого состояния.

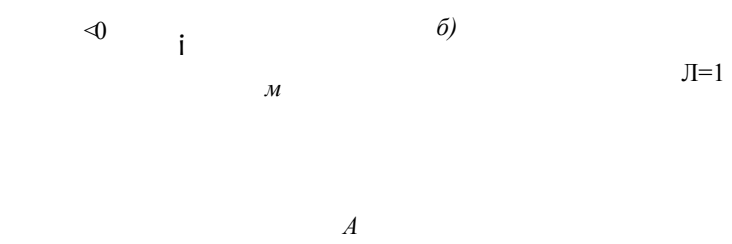


Рис. 2.4

Работа внешней силы T^5, = 1:

$$8К = 1\text{-}6,т>, \qquad (2.1)$$

где $8,\backslash p$ — перемещение i-й точки по направлению силы $P,$ = 1 в первом состоянии, вызванной действием системы внешних сил.

Работа внутренних усилий, как известно из курса «сопротивления материалов» [9], была представлена в виде:

$$6Л = -\sum_{y=10}^{L*i} \left(\frac{(M?\ M'/}{EJj} + \frac{N?\ N'i}{EFi} + \frac{r\backslash Qj\ Q'j}{GFj} \right) dx, \qquad (2.2)$$

где Mj , Nj , Qj , $M'j$, $N'j$, $Q'j$ — усилия в первом и втором состоянии, соответственно; EJj, EFj, GFj — жесткости на изгиб, растяжение-сжатие и сдвиг соответственно для у-го стержня; т] — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, для прямоугольного сечения Т] = 1.2.

В силу принципа возможных перемещений: *5А + &У=* 0, т.е. работа внешних сил равна работе внутренних сил с обратным знаком *-ЬА,* далее, учитывая (2.1) и (2.2), получим:

$$8tf=-\sum_{y=10}^{k'j}\int \frac{MfM'j}{EJj} + \frac{Nf\ N)}{EF,} + \frac{Л\ Oj\ \ Oj}{GFj}\,dx \qquad (2.3)$$

Это выражение носит название *формулы Мора.* Замечательной особенностью вычисления перемещегий по формуле Мора является то обстоятельство, что в качестве второго состояния можно использовать любую систему, образованную из заданной путем отбрасывания лишних связей, т.е. брать в качестве вспомогательного состояния любую статически определимую систему, полученную из заданной. Это в значительной степени упрощает процедуру вычисления перемещения по формуле Мора.

Во многих практических случаях формула Мора может быть значительно упрощена. Например, в статически неопределимых фермах изгибающие моменты и поперечные силы пренебрежимо малы, а продольные силы постоянны по длине каждого стержня. Поэтому для ферм формула Мора принимает вид:

$$bif=bpi=\sum_{Jm1}^{к}\frac{Nf\ N)}{EFj}\cdot \qquad (2\text{-}4)$$

В рамах обычно пренебрегают влиянием вторых и третьих членов (2.3), так как эти члены незначительно влияют на величину перемещений

$$8и» = 8_{Л} = \sum_{;=1\ o}^{к'}\int \frac{JMfM\}}{F_{ы}\ r^{J}}\,dx. \qquad (2.5)$$

Продольные силы вместе с изгибающими моментами учитывают в расчете систем, элементы которых испытывают значительные осевые деформации, сравнимые с деформациями от изгибающих моментов, например, в арках, а также при учете податливости отдельных элементов систем, работающих преимущественно на сжатие или растяжение, например, затяжек в рамах или арках.

Интеграл Мора наряду с методом начальных параметров является достаточно мощным инструментом для определения перемещений стержневых систем. Проиллюстрируем это на примере.

Для ломаного бруса, изображенного на рис. 2.5, *а,* определим угол поворота поперечного сечения *С* относительно вертикальной оси. Пусть жесткость ригеля в два раза больше жесткости стойки, т.е. $EJ_p = 2\ EJ_C$.

Последовательность расчета следующая:

1) строим эпюру моментов $M_{,,}$ от заданной нагрузки q (эпюра моментов действительного состояния п рис. 2.5, б);

2) строим эпюру моментов $M_т$ при загружении конца консоли единичным моментом $M= 1$ *(эпюра* моментов фиктивного состояния *m,* рис. 2.5, в);

3) выразим изгибающие моменты через переменные абсциссы х

- для ригеля: $M_n = -qx^2/2$; $M_m = -1$;
- для стойки: $M_n = -qa^2/2$\ $M_m = -1$;

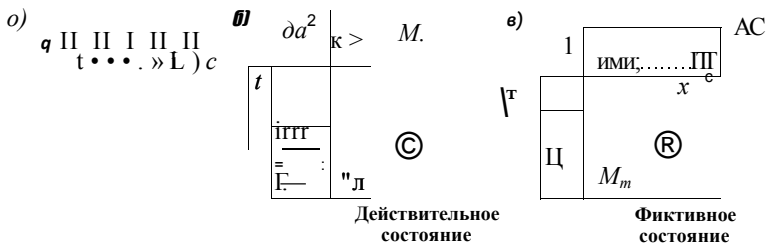


Рис. 2.5

4) применяя формулу перемещений (2.5), найдем искомый угол поворота

$$o \quad uP \qquad\qquad o \quad 2EJ_c$$

$$\frac{aa^{o}}{12\,EJ_C} + \frac{o\overline{e^{2}}}{2\,EJ_C} = \frac{Idqa^{3\,3}}{12\,EJ_C} \text{ (рад).}$$

2.3. Расчет рам методом снл

В методе сил в качестве основной выбирается обычно статически определимая система, получаемая из заданной п раз статически неопределимой системы путем отбрасывания п жестких связей или постановкой (введением) шарниров. Этими жесткими связями могут быть жесткие опоры или связи, соединяющие одну часть стержня с другой. Усилия взамен отброшенных связей прикладываются в месте разреза или введенного шарнира в виде поперечных, продольных сил или изгибающих моментов.

Можно выбрать различные варианты основной системы. Необходимо, чтобы полученные таким образом основные системы были статически определимыми и кинематически неизменяемыми.

Рассмотрим в качестве примера трижды статически неопределимую систему (рис. 2.6, *а)*. Разрезав опорные стержни опоры *А* и *С* и заменив их влияние силами *X\, X*$_2$, А3, получим один из возможных вариантов основной системы (рис. 2.6, б). Второй вариант получим путем разреза в жесткой заделке *В* и замены его влияния введением сил *X\, X*$_2$ и момента Л3 (рис. 2.6, *в)*. Третий вариант получаем введением в *узел D шарнира, удалением из узла С жесткой* опоры и введением в узел *В* шарнирно-неподвижной опоры взамен жесткой заделки (рис. 2.6, *г)*.

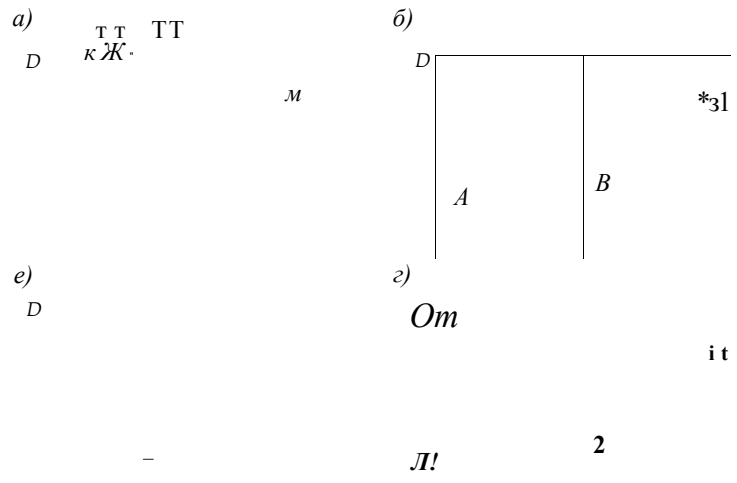


Рис. 2.6

Все полученные системы являются статически определимыми и геометрически неизменяемыми, поэтому они могут быть использованы для расчета. Однако из них надо выбрать наиболее простую для расчета. Вероятно, наиболее простым является I вариант (рис. 2.6, б), так как консольная система, как правило, проще рассчитывается (нет необходимости находить опорные реакции).

Для основных систем неконсольного вида необходимо в первую очередь вычислить, пользуясь уравнениями равновесия, опорные реакции, а затем, приняв их за внешние силы, построить эпюры. Для избежания ошибок всегда следует проводить проверку правильности вычисления опорных реакций.

После выбора основной системы составляют дополнительные уравнения совместности деформаций, называемые каноническими

уравнениями метода сил. Количество их всегда равно числу неизвестных усилий.

Канонические уравнения метода сил составляются для основной системы из условия равенства нулю перемещений по направлению внешних лишних связей и относительных перемещений по направлению внутренних лишних связей. Итак, в основной системе перемещения по направлению каждого из неизвестных усилий *Xi (i* — 1, 2, 3,..., *n)* от всех действующих на нее силовых факторов должны быть равны 0, т.е.

$$Д/7> + 8/1 \quad + 8д \quad +—+ 6/л X_{,} = 0, \quad (/ = 1,2,3,\ldots, л), \qquad (2.6)$$

где Дг> — перемещение в основной системе по направлению отброшенной 1-й связи от действия внешних нагрузок; $8_{,и}$ — перемещение в основной системе по направлению отброшенной /-й связи от действия единичного усилия Л* = 1 (k = 1,2,3,..., п).

Из теоремы о взаимности перемещений, примененной к основной системе, следует, что 6,* = 6/у.

Очевидно, что выполнения равенства (2.6) является необходимым и достаточным условием эквивалентности заданной и основной систем. Система (2.6) называется каноническим уравнением метода сил.

Решив систему уравнений (2.6) относительно X,, мы можем заменить дальнейший расчет заданной статически неопределимой системы расчетом статически определимой основной системы, нагруженной той же нагрузкой с дополнением усилий $X\backslash, X_2,\ldots, X_{,,}$, заменяющих влияние отброшенных связей.

Для определения коэффициентов и свободных членов Л//> канонических уравнений (2.6) в методе сил применяют формулу Мора (2.3) или для рам уравнение (2.5), выражающее перемещения через внутренние силы в стержневой системе.

При вычислении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил, кроме непосредственного интегрирования (2.5), применяют различные упрощенные приемы вычисления интегралов. Особенно обстоятельно они разработаны для рам с прямолинейными стержнями постоянного сечения. Жесткость *EJ* = const при этом выносится за знак интеграла, а под интегралом остается произведение двух функций: Л/,- и М^, одна из которых, как правило, или обе являются линейными функциями. Операция интегрирования здесь часто называется перемножением эпюр и ее символически изображают следующим образом:

$$\frac{1}{EJ}\int_{a}^{b} My \; M_2 \; dx = My \circledR M_2, \qquad (2.7)$$

здесь знак ◈ означает умножение в смысле формулы Мора.

Применение готовых формул показано в таблице 2.1. Сами эти формулы без труда определяются элементарными методами. Эта таблица является весьма универсальной, так как она пригодна для определения перемещений по двум любым прямолинейным эпюрам, а также криволинейной с прямолинейной. Если любая из фигур, приведенных в табл. 2.1, перемножается с треугольником, то это перемножение сводится к трапеции, одна из ординат которых равна 0. При перемножении на прямоугольник нужно учесть, что $M_a = M_b$.

При помощи расчленения эпюр на части можно добиться того, чтобы при перемножении участвовали эпюры простой структуры, приведенные в табл. 2.1.

Например, пусть нужно перемножить эпюры, приведенные на рис. 2.7. Каждую из эпюр можно представить в виде суммы: в первом случае, в виде двух треугольных и параболической; во втором - в виде двух треугольных.

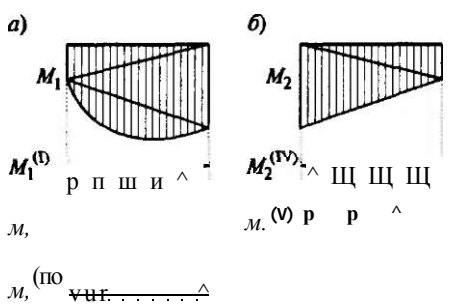


Рис. 2.7

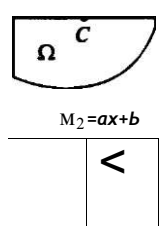


Рис. 2.8

Итак, $My = M\circledR + A/\{") + Л/<^{ш}>$; $M_z = M™ + M™$.

Тогда

$My \circledR M_2 = (<> + <> + Л//"") \circledR (л/™ + M\ ^) = м\circledR \circledR м™ 4$

$+Л/<^{П}> \circledR мр + м<^{ш}> \circledR M\ f) + м\{'> \circledR M<^{v}> + м<"> \circledR M<^{v}> +$

$+Л/<^{Ш}>\circledR Л/<^{у}>.$

А далее следует воспользоваться формулой для вычисления интегралов $\int_0^l M_x(x)M_2(x)dx = M_j \cdot M_2$, приведенных в табл. 2.1.

Довольно удобным способом перемножения эпюр является *способ Верещагина.* Этот способ применим в случае, когда из двух перемножаемых эпюр одна как минимум является прямолинейной. Если одна из эпюр является криволинейной, вычисляется площадь П криволинейной эпюры, которая умножается на ординату под ее центром тяжести, взятую в прямолинейной эпюре M_2 (рис. 2.8).

Предположим $M_l=f(x), M_2 = ax + b,$ тогда

$$\int_0^l M_x(x)M_2(x)dx = My \cdot M_2 =$$

$$= \int_0^l f(x)(ax+b)dx = \int_0^l bf(x)dx + \int_0^l fx\,f(x)dx,$$

но величина $\int_0^l f(x)dx =$ П представляет собой площадь криволинейной эпюры, а величина $\int_0^l fx \cdot f(x)dx = S$ — статический момент площади этой эпюры относительно левого конца стержня. Следовательно,

$$\int M_X \cdot M_2 = \quad + \quad = \quad +$$

Известно, что величина 5/П представляет собой ординату центра тяжести криволинейной эпюры, а $b + a\text{-}S/£i$ — значение M_2 при $x_c = S/П.$

В случае двух криволинейных эпюр способ Верещагина неприменим. Надо пользоваться интегралом Мора. Способ Верещагина применим также в тех случаях, когда одна из эпюр не криволинейная, а ломаная.

В таблице 2.2 приведены формулы для определения площади П, положения центра тяжести Z_c и ординаты y_c в центре тяжести для некоторых довольно распространенных плоских фигур.

В случае, когда имеются эпюры общего вида (например, обе эпюры криволинейные, либо трапеции, рис. 2.8), разбиение уже на два равных интервала дает согласно формуле Симпсона точное выражение интеграла

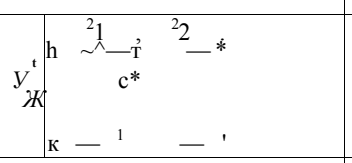
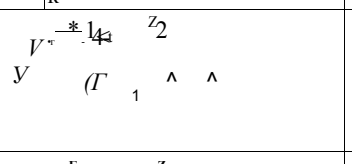
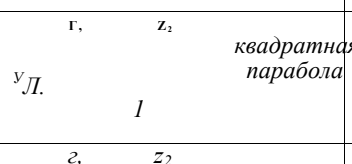
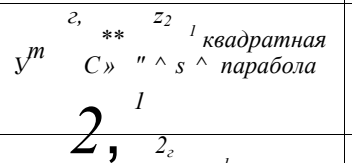
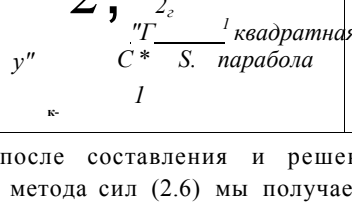
$$Ml \quad ® \quad M_2 \quad =\hat{}(м_{1л} \quad M_{2а} \quad +4 \quad M_{xB} \quad M_{2B} \quad +M_{и}c \quad M_{2>с}),$$

где индексы *А и С* относятся к сечениям, расположенным на концевых сечениях интервала длиной *I,* а индекс *В* — к срединному сечению того же интервала.

В тех случаях, когда функции *Mi* и M_2 в рассматриваемом интервале длиной / являются линейными и известны их значения в концевых сечениях интервала, то формулу переумножения Mi и M_2 можно преобразовать в следующем виде:

$$M_1®M_г=\hat{}2M_{1Л}M_{1Л} \quad + \quad M_{lA}M_{2iC} \quad + \quad M_{1C}M_{2Л} \quad + \quad 2M_{1C}M_{2C})- \qquad (2.8)$$

Таблица 2.2

№№ п/п	Фигура	Площадь	Абсциссы центра тяжести	
			Z	*Z2*
1.		*yi*	*1* *2*	*1* *2*
2.		*yl* *2*	*I '*	*h* 3
3.		*yl* 3	I / 4	4/
4.			! '	I '
5.		$\frac{2}{У}$ *yl*	*i* *2*	*/* 2

Итак, после составления и решения канонической системы уравнений метода сил (2.6) мы получаем значения Х?„..., Л^,

т.е. значения усилий в лишних связях. Затем строим для основной системы эпюры изгибающих моментов оі каждого из найденных усилий. Для этого могут быть использованы построенные ранее единичные эпюры, все ординаты которых необходимо теперь умножить на найденные значения соответствующих неизвестных.

Сложив по характерным сечениям (на протяжении всей рассчитываемой конструкции) ординаты эпюр от действия всех сил Л/ с ординатами грузовой эпюры, получим окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе.

2.4. Пример расчета плоской рамы методом **сил** (задача № 7)

Пусть требуется провести расчет плоской рамы (рис. 2.9, *а)* методом сил в следующей последовательности:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Составление системы канонических уравнений.
4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений.
5. Проверка правильности подсчета коэффициентов канонических уравнений.
6. Решение системы канонических уравнений и проверка ее правильности.
7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов *Мок-*
8. Проверка правильности построения эпюры $M_{ок}$ и построение эпюры *Q(z).*
9. Построение эпюры *N.*
10. Статическая и деформационная проверка рамы **в** целом.

Решение

1. Определение степени статической неопределимости

Степень статической неопределимости рассчитывают по формуле

$$n = 3K - Ш,$$

где *К* — количество замкнутых контуров в системе, включая опорные; *Ш* — количество одинарных шарниров в системе, включая опорные.

В нашем примере, если мысленно замкнуть землю (см. пунктирную линию на рис. 2.9, *а),* имеем *К* - *2, Ш*= 4, /1 = 3-2-4 = 2.

Таким образом, заданная рама дважды статически неопределима, или, другими словами, имеет две лишние связи.

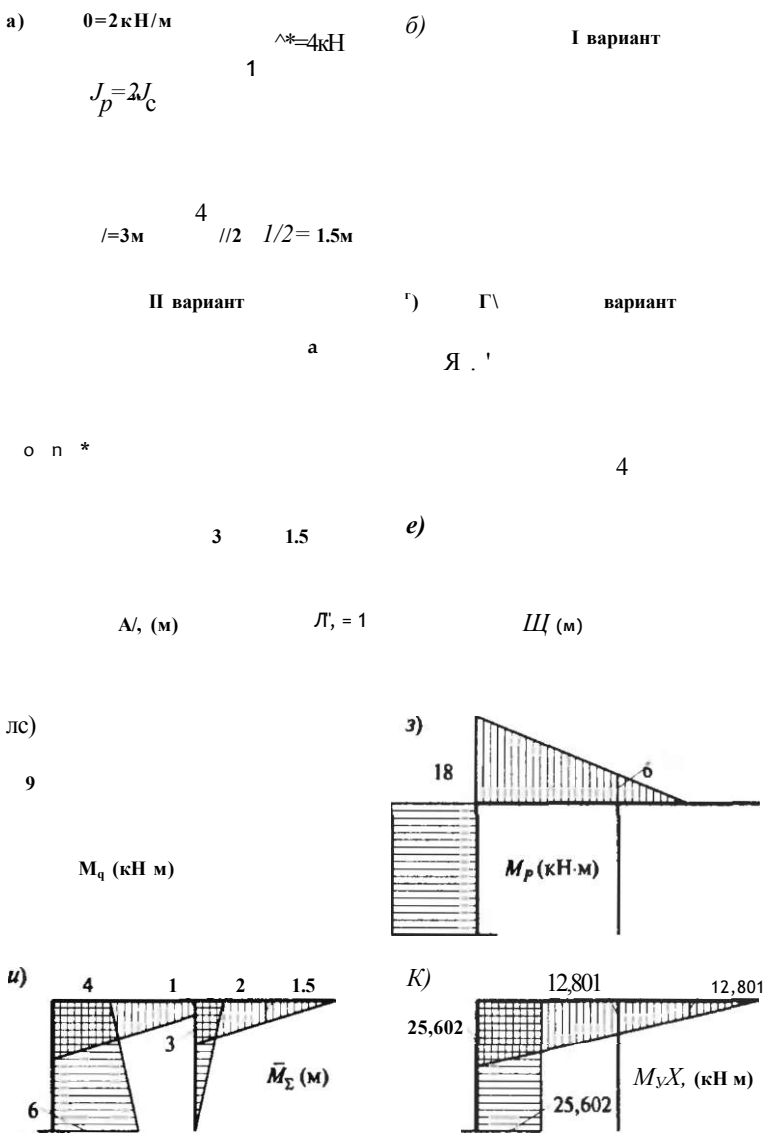


Рис. 2.9

2. *Выбор основной системы*

Известно, что основная система определяется из заданной путем отбрасывания лишних связей и приложением соответствующих усилий, возникающих в отброшенных связях в заданной системе. При этом основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой.

Сравнивая три варианта основных систем (рис. 2.9, *б* — 2.9, *г),* приходим к выводу, что наиболее целесообразно в качестве основной системы выбрать I вариант (рис. 2.9, б), так как в этом случае:

- не требуется предварительное вычисление опорных реакций;
- эпюры изгибающих моментов, построенные в этой схеме от воздействия на нее каждого из усилий $X\backslash = 1$, $X_2 = 1$, P и q, будут распространены на меньшем количестве участков системы и представлены простейшими геометрическими фигурами. Это значительно облегчает процесс определения коэффициентов канонических уравнений.

3. Составление системы канонических уравнений

Канонические уравнения, необходимые для решения статически неопределимых задач, представляют собой уравнения совместности деформаций. Число их всегда равно степени статической неопределимости. Физический смысл каждого из канонических уравнений, как было указано выше, состоит в том, что суммарное перемещение по направлению усилий Л/ от всех действующих в основной системе силовых факторов, включая и неизвестные, равно 0, так как в действительности в этих направлениях стоят связи, препятствующие возникновению перемещений по направлению этих неизвестных.

Для рассматриваемого случая канонические уравнения имеют вид:

$$+ 5(2\text{^}2 + Hp + {}^{A}\backslash a = \quad + \quad + \quad P + \text{А}2д = \tag{2.9}$$

4. *Вычисление коэффициентов канонических уравнений*

Так как все коэффициенты канонических уравнений представляют собой перемещения, то для их вычисления вначале строят единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов в основной системе. Затем по формуле Мора с применением готовых формул (см. табл. 2.1) или правила Верещагина с использованием табл. 2.2 определим их значения.

Эпюры изгибающих моментов, построенные в основной системе от воздействия на нее каждого в отдельности усилия $X\backslash = 1$; $X_2 = 1$; P и q, показаны на рис. 2.9, *д* - 2.9, з.

Исходя из единичных и грузовых эпюр определяем коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_C} 2 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{EJp} \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \frac{2}{3} 6 = \frac{Ю 8}{Ш_c'};$$

. \ \ 1 6 + 3 25.5.

O 1 1 . . 2 . 1 . . . 11.333

$$\Delta_{1P} = \frac{}{EJ_C} -18 \cdot 2 \cdot 6 \frac{}{bJp} \cdot \sim [2 \cdot (6 \cdot 18 + 3 \cdot 6) + 3 \cdot 18] -$$

$$EJp \quad 2 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad J \quad EJ_C$$

$$1 \quad * \quad o \quad o \quad \frac{1}{} \quad \frac{3}{} \quad \frac{9}{} (3 \cdot 6 + 3) = \frac{131\text{-}625.}{}.$$

$$\Delta_{2P} \quad 7_C \quad 2 \quad EJp \quad 2 \quad EJ_C$$

$$\Delta_{2q} \quad \frac{1}{EJ_C} \quad 2 \quad \frac{1}{EJ_p} \quad 1 \quad 27 \quad EJ_c$$

5. *Проверка правильности подсчета коэффициентов*

Правильность расчета коэффициентов канонических уравнений осуществляется путем универсальных проверок, при этом должны выполняться следующие условия:

$$L \quad A \qquad (2.11)$$

где Е5 — сумма всех найденных главных и побочных коэффициентов

$$6 = 6ц + 6)2 + 621 + 622;$$

бк — величина, полученная в результате умножения единичной суммарной эпюры на себя

$$8_{в} = \sum_{i=1}^{к} \int_{0}^{l_j} \frac{M_i M_p}{EJ_j}\, dx$$

ЕЛ — величина, определяемая сложением значений, полученных в результате умножения эпюры Л/г на эпюру M_p и эпюры M_i на эпюру M_q, $к$ — количество участков эпюры.

Эпюра Mi (рис. 2.9, и) строится в основной системе от одновременного воздействия на нее всех неизвестных единичных усилий (Л^ = 1; X_2 = 1), т.е. путем сложения единичных эпюр M\ и M_2

$$M_z = (M_x + M_2).$$

В нашем случае

$$\pounds 6 = 6ц + 6_{12} + б21 + 622 = \frac{108}{EJ_C} \quad \frac{25.5}{EJ_C} \quad \frac{25.5}{EJ_C} \quad \frac{1L333}{EJ_C} \quad \frac{68.333}{EJ_C}$$

$$= \frac{1}{EJ_C}\left[2 \cdot (6 \cdot 6 + 4 \cdot 4) + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6\right] + \frac{1}{EJ_p}\left[2 \cdot (4 \cdot 4 + 1 \cdot 1) + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4\right] + \frac{1}{EJ_P}\left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\right] = \frac{68.333}{EJ_r}$$

т.с.

$$\pounds A = Aip + AI_9 + Д2P + \&2g = \frac{307.125}{EJ,} \quad \frac{131.625}{EJ_r} + \frac{72}{EJ_r} + \frac{27}{EJr} \quad \frac{339.75}{\pounds 7,} \qquad (2.12)$$

$$A^{\wedge} = -^{\wedge} - 2 \cdot 1 8 - Л - \cdot 2 \cdot [2 \cdot (4 \cdot 1 8 + 1 \cdot 6) + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 18] -$$

$$\backslash \quad 1 \quad 1 \cdot 5 \qquad 6 + 4 \cdot 2 \cdot 9 -$$

$$EJ_p \quad 12 \quad {}^{v} \qquad EJ_C$$

т.е. $ZA = A_S{}^{\wedge},$.

Таким образом, оба условия удовлетворяются. Следовательно, коэффициенты канонических уравнений рассчитаны верно.

6. *Решение системы канонических уравнений и проверка ее правильности*

Подставив в систему уравнений значения коэффициентов канонических уравнений, получим

$$108*! - 25.5*2 - 307.125\text{-}131.625 = 0;$$
$$-25.5*! + 11.333*2 + 72 + 27 = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения неизвестных

$$*i = 4.267 \text{ кН}; \quad *_2 = 0.865 \text{ кН}.$$

Правильность вычисления неизвестных проверим путем подстановки найденных значений *i и $*_2$ в исходные уравнения:

$$108\text{-}4.267 - 25.5\text{-}0.865 - 438.750 = 460.836 - 460.808 \approx 0;$$

$$-25.5\text{-}4.267 + 11.333\text{-}0.865 + 99 = -108.808 + 108.803 \approx 0.$$

7. *Построение окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$*

Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$ в характерных сечениях заданной системы целесообразно подсчитать в табличной форме (табл. 2.3), предварительно пронумеровав все характерные сечения и задавшись правилом знаков изгибающих моментов (рис. 2.10, б).

Окончательную эпюру изгибающих моментов $M_{ок}$ для заданной системы строим в соответствии с принципом независимости действия сил путем сложения «исправленных» эпюр $M\backslash X\backslash$ и M_2*2 с грузовыми эпюрами *Мр* и *Мд*, которые построены в основной системе

$$M_{ж} = M_x *! + M_2X_2 + M_P + Мд.$$

«Исправленные» эпюры изгибающих моментов M_xX_x и M_2X_2 строим путем умножения всех ординат единичных эпюр $M\backslash$ и M_2, соответственно на значения X_x и X_2 с учетом их знака. Построенные таким образом эпюры $M\backslash X_x$ и M_2X_2 приведены на рис. 2.9, *к* и рис. 2.10, *а*.

Так как на участке 2—3 эпюра $M_{ок}$ (рис. 2.10, в) криволинейна, то для уточнения ее очертания необходимо найти экстремальное значение изгибающего момента. Для этого рассмотрим элемент 2—3, вырезанный из статически неопределимой системы. На этот ригель действует равномерно распределенная нагрузка 9 = 2 кН/м и два опорных момента M_2 = -3.128 кН-м и M_3 = 5.071 кН-м (табл. 2.3).

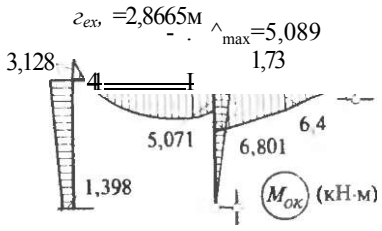
а) 1.73 1.73 б) 3 С 6 7 8 9

M_2X_2 (кН м)

5-Ll

D I

в) z_{ex} =2,8665м ^{max}=5,089



г) *y* 9=2КН/М У 5.071

3,128 А (кН м)

/2_3=3м

4

д) *e)* z_{ext} =2,8665м

Узел *В* Узел С

3,128кН-м 5.071кН-м б,801кНм ^{5}-^{733} 0.267

ЯДДШ^{III} рптр 7Т>

J 4,267 LLlnutf-

(О) (кН)

3,128кН-м **1,73кН м** 0,865 0,865

«с) Узел *В* з) Узел С

0,267кН 0,267кН

ж

/V2-3=0,865кН

0,865кН 4 6-9

0,865кН

Г Т 5,733кН "

4 -о

и) *к)* фу ?=2кН/м Р=4кН

0,865

ТгЩ 1 1 1 . 1 • , . 1 J _ в

5,733 ® (кН) 4,267кН |

1,398кНм 0,865кН

0,865кН 5,733кН

Рис. 2.10

Таблица 2.3

Номер сечения	$M_x X_x$, Н-м	кНм	$м_P$, кНм	$M_д$, кНм	$Мок$ кНм
0	25.602	0	-9.0	-18.0	-1.398
1	25.602	-1.73	-9.0	-18.0	-3.128
2	25.602	-1.73	-9.0	-18.0	-3.128
3	12.801	-1.73	0	-6.0	5.071
4	0	-1.73	0	0	-1.730
5	0	0	0	0	0
6	12.801	0	0	-6.0	6.801
7	6.400	0	0	0	6.400
8	6.400	0	0	0	6.400
9	0	0	0	0	0

Расчетная схема этого элемента показана на рис. 2.10, *г.* Вначале вычислим опорные реакции, составив уравнения равновесия

$$Ш_2 = -Ry3 - 5.071 - 3.128 + 2^{3^2}\text{у} = 0;$$

$$Ш_ъ = R_2\text{-}3 - 5.071 - 3.128 + 2^{Y}\text{у} = 0,$$

откуда R_2 = 5.733 кН и $Д_3$ = 0.267 кН.

Проверим правильность вычисления опорных реакций, составив уравнения равновесия

$$\text{Еу} = R_2 + Д_3 - q\text{-}3 = 5.733 + 0.267 - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Определим координату $z_{ex}t$ сечения, в котором $Q = 0$, а $M =$ = Mgxt, использовав следующую дифференциальную зависимость

$$*M^{\wedge}_{az} = Q(z) = R_2\text{-}qz = 0,$$

откуда

$$Z = Z_{ex\#t} = \frac{R)}{q}L = \frac{\overline{5.733}}{2} = 2.8665 \text{ м}.$$

Тогда для этого сечения получим

$$M^{\wedge} = R_2\, z^{\wedge} - \quad - 3.128 = 5.733 \cdot 2.8665 - \frac{^{2}\ 2\ \text{л}\ 6652}{} - 3.128 =$$

= 5.099 кН-м.

По найденным значениям ординат строим окончательную эпюру изгибающих моментов $M_{ок}$ для заданной рамы (рис. 2.10, в).

8. *Проверка правильности построения эпюр $M_{ок}$ и $Q(z)$*

Для проведения статической проверки вырезаем жесткие узлы рамы кроме опорных, прикладываем все действующие в них моменты и проверяем условия равновесия $2,M_{уз} = 0$.

В нашем примере вырежем узлы *B* и С (рис. 2.10, *д*) и проверим их равновесие.

Узел *B* : $Ш_{уз} = 3.128 - 3.128 = 0$.

Узел С: $IM_{уз} = 5.071 + 1.73 - 6.801 = 0$.

Условия равновесия узлов *B* и С выполняются. Выполнение условия равновесия узлов является необходимым, но недостаточным. Достаточным условием правильности определения $M_{ок}$ является выполнение деформационной проверки заданной системы с применением эпюры $M_{ок}$, суть которого заключается в доказательстве отсутствия перемещения в точках и по направлению каждой отброшенной связи, т.е.:

$$A_s = {}^{-}I \; {}^{A}{}_{y=i} \; {}'\,i\,M_{\text{„}}\,M_{t}\,{}_{o}{}^{ы}{}_{j} = 0.$$

Эта проверка хотя и не имеет физического смысла, так как складываются различные по направлению перемещения, но она дает возможность доказать правильность построения $M_{ок}$ во всех сечениях заданной системы.

Для удобства вычислений целесообразно расчленить криволинейную эпюру $M_{ок}$ на участке рамы 2-3 (рис. 2.10, *в)* на трапецеидальную и параболическую (подобно приведенному выше на рис. 2.7). Тогда

$$A_s = -\text{-}^{\wedge}j\text{-}"\,^{\wedge}\,"\,[2 \cdot (1\text{-}4 \cdot 6 + 3.128 \cdot 4) + 3.128 \cdot 6 + 1.4 \cdot 4] +$$

$$+ \frac{}{3\,EJp} \cdot (4+1) + \frac{[}{6}\,\frac{2}{EJ_p} \cdot (-3.128 \cdot 4 + 5.071 \cdot 1) - 3.128 \cdot 1 + 5.071 \cdot 4] +$$

$$\frac{1}{EJ_C} \quad 2\text{-}1.73\,\frac{}{3} - \quad 2 + {}^{\wedge}{}^{\wedge}\text{-}\,\frac{1}{6\,EJ_r}\,2\text{-}(6.8\text{-}3 + 6.4\text{-}1.5) + 6.8\text{-}1.5 + 6.4\text{-}3] +$$

$$+ \frac{1}{EJ_p} \sim \frac{1}{2} \cdot 6.4 \cdot 1.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.5 \ll 0.$$

Ординаты эпюры $Q^{\wedge}$определяем, используя зависимость $Q(z) = dM(Z)/dz$ или записывая в конечных разностях

$$Q(z) = Q^{\circ}\{z) + \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}. \qquad (2.14)$$

где (z) — поперечная сила в сечениях с координатой Z по длине участка, имеющего расчетную схему в виде простой двухопорной балки, загруженной заданной внешней нагрузкой (рис. 2.10, *г).*

Участок 0—1. На этом участке внешняя нагрузка отсутствует, поэтому (z) = 0, и бо-i определяем по формуле (2.14)

$$Q_{qi} = -3.128$$

Участок 2—3. В этом случае при наличии нагрузки q = 2 кН/м имеем

$$Q_{2\text{-}3} = \frac{ql}{2} + \frac{5.071 - (-3198)}{l} = 3 - 2Z + 2.733 = 5.733 - 2z,$$

откуда при Z = 0, Q_i = 5.733 кН;
при Z = / = 3 м, ft = 5.733 - 6= -0.267 кН.

Участок 4-5. G4-5 = - ^ y [1] ^ = 0.865 кН.

Участок 6-7. 06-7 = $\frac{\&4\ (\wedge 801)}{}$ = 0.267 кН.

Участок 8-9. $0_{8_}9$ = = -4.267 кН.

По найденным значениям ординат строим эпюру *Q* (рис. 2.10, *е).*

9. Построение эпюры N

Ординаты эпюры продольных сил определяем из условий равновесия Ez = 0 и Ey = 0 узлов рамы, вырезанных из эпюры *Q*. При этом отрицательную поперечную силу направляем так, чтобы она вращала вырезанный узел против хода часовой стрелки, а положительную - по ходу часовой стрелки. Нормальные силы направляем от узла, т.е. предполагаем, что стойка и ригель растянуты.

Вырезав узел *B* (рис. 2.10, лс), составим уравнения равновесия:

Zz = 0, $N2_{_3}$ + 0.865 = 0, N2-3 = -0.865 кН;

Ey = 0, - 5.733 = 0, $Ai_{_o}$ = -5.733 кН.

Знак «минус» говорит о том, что направления продольных усилий ригеля и стойки были приняты неверно. Поэтому в действительности ригель и стойка не работают на растяжение, а на сжатие.

Из рассмотрения равновесия узла С (рис. 2.10, з) следует:

Ez = 0, $7V_{6_9}$ - 0.865 + 0.865 = 0, = 0;

T,y = 0, -N^$_5$ - 0.267 + 0.267 = 0, yv_{4_5} = 0.

По вычисленным значениям ординат для каждого участка строим эпюру TV (рис. 2.10, *и).*

10. *Статическая проверка рамы в целом*

Статическая проверка рамы в целом производится для подтверждения правильности построения эпюр *Q, N* и $M_{ок}$. Она заключается в проверке равновесия рамы в целом или любой отсеченной ее части, т.е. проверке удовлетворения условий равновесия Ez = 0; = 0; = 0 под воздействием внешних нагрузок и внутренних усилий, возникающих в местах проведенных сечений.

Для выполнения этой проверки отсечем заданную раму от всех опор и заменим их действие возникающими в этих сечениях внутренними усилиями *Q, N* и *M* (рис. 2.10, *к),* значения которых определяются по эпюрам *Q, N* и $M_{ок}$. Направление всех внутренних усилий при этом должно соответствовать их знаку. Следовательно,

Zz = 0, 0.865 - 0.865 = 0, 0 = 0;

Zy = 0, 5.733 + 4.267 - 6- 4 = 0, 0 = 0;

$Ш_A$ = 0, 1.3 • 8 + + 4 • 4.5 - 4.267 • 6 = -27 + 27 = 0, 0 = 0.

Уравнения равновесия удовлетворяются, следовательно, рама рассчитана верно.

2.5. Метод перемещений. Степень кинематической неопределимости рам

Для раскрытия сути метода перемещений дадим определение понятия степени кинематической неопределимости. *Степенью кинематической неопределимости* называется число возможных перемещений узлов заданной системы.

Как это было показано выше, при расчете статически неопределимых систем по методу сил искомыми величинами принимались усилия в лишних связях (силы и моменты). После определения неизвестных усилий в лишних связях далее по методу сечений определяются внутренние усилия в произвольном сечении и через них устанавливаются величины перемещений в любой точке конструкции. При расчете статически неопределимых систем по методу перемещений за искомые величины принимаются те перемещения, через которые можно будет определить величины внутренних уси-

лий в любом произвольном сечении. При расчете стержневых систем по классическому методу перемещений, принимая за искомые величины перемещения узлов заданной системы, пренебрегают деформациями от поперечных и продольных сил ввиду их малости и учитывают лишь деформации от изгиба в элементах заданной системы. Кроме того, пренебрегают различием длин элементов заданной системы до и после нагружения системы.

Известно, что для определения изгибающего момента в произвольном сечении заданного стержня необходимо знать величины поворотов в концевых сечениях и относительные линейные смещения концов стержня друг относительно друга.

При расчете статически неопределимой системы методом перемещений первоначально необходимо установить общее число неизвестных перемещений, подлежащих определению для адекватного вычисления величин внутренних усилий.

Следовательно, при расчете рам за неизвестные следует принимать углы поворотов и линейные смещения узлов заданной системы. Общее число неизвестных п будет равно сумме числа неизвестных углов поворота узлов n_y и их возможных линейных перемещений $п_л$, т.е.

$$n = n_y + n_л. \qquad (2.15)$$

Число неизвестных углов поворота $п_y$ равно числу жестких узлов заданной системы. Жестким считается узел, в котором концы, по крайней мере, двух из сходящихся в нем стержней жестко связаны между собой (например, узлы 1, 2, 3, на рис. 2.11, а; узлы 1, 2 на рис. 2.12, *а).*

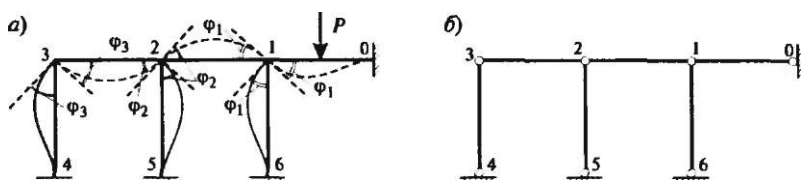


Рис. 2.11

Для определения числа линейных неизвестных перемещений заданную систему следует заменить *ее шарнирной схемой* путем введения полных шарниров во все узлы и опорные закрепления (рис. 2.11, б и рис. 2.12, б). Число неизвестных линейных смещений узлов системы равно числу стержней, которые необходимо ввести в шарнирную *схему,* чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую систему. Следовательно, число независимых линейных смещений узлов равно степени геометрической изменяемости

шарнирной системы, полученной из заданной, путем введения во все жесткие узлы, включая и опорные, полных шарниров.

На основании о пренебрежении продольными деформациями элементов, для плоской рамы (рис. 2.11, *а),* линейные смещения узлов отсутствуют. При этом, шарнирная схема (рис. 2.11, б) является

Рамы, шарнирные схемы которых являются геометрически неизменяемыми, относятся к категории, так называемых, *закрепленных* или *несвободных.* Для таких рам число неизвестных перемещений легко определяется и оно всегда равно числу жестких узлов: $n = Пу$. В нашем примере $n = 3$.

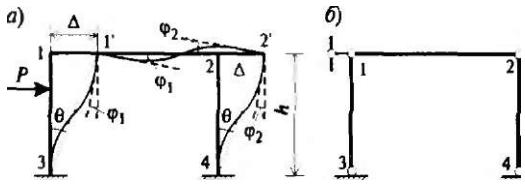


Рис. 2.12

В качестве другого примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 2.12, *а,* число жестких узлов которого равно 2. Следовательно, $n_y = 2$.

Шарнирная схема рамы один раз геометрически изменяемая, так как для превращения ее в геометрически неизменяемую необходимо ввести 1 стержень, например, так, как это показано на рис. 2.12, б. Итак, число линейных неизвестных перемещений $n_л = 1$. Общее число неизвестных перемещений в рассматриваемой системе, изображенной на рис. 2.12, *а,* равно $n = 2 + 1 = 3$.

2.6. Основная система. Канонические уравнения метода перемещений

При расчете методом перемещений заданная система расчленяется на однопролетные статически неопределимые балки путем введения дополнительных связей, позволяющих исключить все линейные и угловые перемещения узлов заданной системы.

Получаемая в результате система называется *основной системой метода перемещений.* Например, для расчета заданной системы, изображенной на рис. 2.13, *а,* по методу перемещений основная

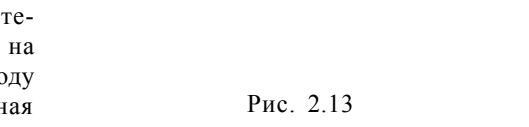


Рис. 2.13

система будет иметь вид, представленный на рис. 2.13, 6. При этом $n = n_y + n_л = 6 + 2 = 8$.

Поскольку в заданной системе имеют место и повороты, и линейные смещения узлов, то основной системе надо придать такие же повороты и смещения, при этом добиваясь равенства нулю реакций во всех введенных связях, сопротивляющихся этим поворотам и смещениям. Тогда можно утверждать, что заданная и основная система в нагруженном состоянии являются эквивалентными.

Обозначая через й|, R_2,..., Rft величины *реактивных моментов* и *усилий в п* -м количестве дополнительно введенных элементов основной системы, математическая формулировка условий эквивалентности заданной и основной систем будет иметь вид:

$$Ri = 0; \quad Л_2 = 0; \quad \ldots \quad R_n = 0. \tag{2.16}$$

Для раскрытия выражений реакций Л,- (/'= 1, 2,..., я), введем следующие обозначения:

Z, (i— 1, 2,..., я) — линейные и угловые перемещения узлов заданной системы при действии системы внешних сил;

Пк (А 1> 2,..., я) — реакция в /-й, дополнительно введенной связи от перемещения Z* = 1;

RjPq (/= 1, 2,..., я) — реакция в /-Й, дополнительно введенной связи основной системы от действия заданной системы внешних сил.

С учетом принятых обозначений, суммарную реакцию в /-й дополнительно введенной связи, можно записать в следующем виде:

$$R_t = m\ Z\ + r_a Z_2 + \ldots + r_{in} Z_n + R_{iPq}\ (/ = 1, 2,..., я). \tag{2.17}$$

Для того чтобы основная система стала эквивалентна заданной, полную реакцию Л,- (/ = 1, 2,..., я) во всех введенных связях основной системы, согласно (2.16), необходимо приравнять нулю

$$\sum_{*=1}^{n} T\,n\,k\,Z\,i + Pi P_q = 0,\ (/= 1,2,\ 3,..., я),$$

или в развернутой форме:

$$г_и\ Z\ + r_n\ Z_2 + \ldots + r_{ln}\ Z_n + R_{lPq} = 0;$$

$$r_{2l}\ Z,\ + r_{22}\ Z_2 + \ldots + r_{2n}\ Z_n + R_{JPq} = 0;$$

$$r_{n\backslash}\ Z\backslash\ + r_{n2}\ Z_2 + \ldots + r_{nn}\ Z_n + R_{nPq} = 0.$$

Здесь неизвестными являются перемещения Z\ (/ = 1, 2,..., п), т.е. возможные перемещения узлов заданной системы по направлению введенных связей в основной системе.

Уравнения (2.18) называются *каноническими уравнениями метода перемещений.* Коэффициенты этих уравнений обладают свойством симметрии = что следует из *теоремы о взаимности реакций*, примененной к основной системе метода перемещений.

Проверкой правильности расчета рамы методом перемещений служат равенство нулю суммы моментов, передающихся на каждый узел с примыкающих к нему стержней, а также иные условия равновесия рамы.

Заметим, что в методе сил эти условия выполняются в каждой единичной эпюре и поэтому не обеспечивают проверку решения канонических уравнений.

Для определения коэффициентов г;* и свободных членов Rjpq системы канонических уравнений метода перемещений (2.18) необходимо предварительно построить эпюры моментов в основной системе от заданной системы внешних сил и от единичных перемещений Zj = 1. Все коэффициенты, а также свободные члены уравнений разделяются на две группы: коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных дополнительных элементах; коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных дополнительных элементах основной системы.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных элементах, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия моментов *ЪМ* — 0, согласно методу сечений.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных связях основной системы, определяются разрезанием элементов рамы и составлением уравнения равновесия сил на отсеченной части ***Ъу*** = 0. При этом направление оси ***у*** выбирается так, чтобы уравнение получилось наиболее простым по форме.

Следовательно, для того чтобы построить эпюру моментов в основной системе от действия системы внешних сил и от *Z,* — 1 (/= 1, 2,..., я), необходимо предварительно определить эпюру моментов в однопролетных статически неопределенных стержнях (входящих в состав основной системы, за исключением дополнительных элементов). Откуда следует, что в общем случае для реализгции метода перемещений необходимо предварительно рассмотреть решение задачи об определении эпюр внутренних усилий в од-

нопролетных статически неопределимых стержнях при кинематическом (линейном и угловом перемещении концевых сечений) и внешнем силовом и температурном нагружении.

2.7. Определение реакций в однопролетных статически неопределимых стержневых элементах

Сначала определим выражения изгибающих моментов и поперечных сил в однопролетных балках при единичных угловых перемещениях или при единичных относительных линейных смещениях концевых сечений (рис. 2.14, а).

Дифференциальное уравнение изгиба балок с постоянным поперечным сечением при отсутствии внешних нагрузок, действующих в пролете, записывается в виде

$$\frac{d^4}{dx^4} = 0. \qquad (2.19)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (2.16) запишем в следующем виде:

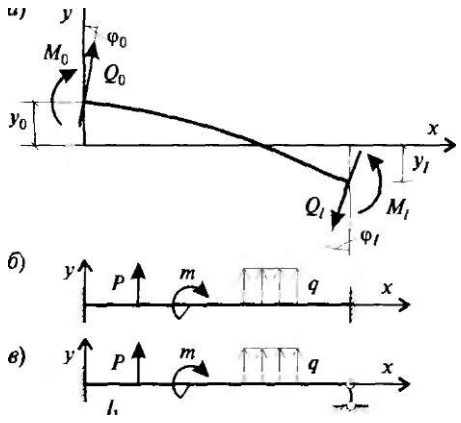
$$y = Cy\ x^3 + c_2 x^2 + +c_3 x + c_4, \qquad (2.20)$$

откуда

$$\Phi = \frac{}{dx}$$

$$= 3cyx^2 + 2c_c x + c_3. \qquad (2.21)$$

Вводим следующие граничные условия:



I —

Рис. 2.14

при x = 0, $y = \}>o;\ \phi = \phi_0;$

при x = /, $y = y1;\ \Phi = \Phi/.$ **(2.22)**

С учетом граничных условий задачи (2.22) из (2.20) и (2.21), получим:

$$<4 = Jo;\quad c_3 = \phi o;\ c,\ P + c_2 P + \Phi o / + Jo = y1;$$

$$3c,\ /^2 + 2c_2 / + \phi_0 = \phi/. \qquad (2.23)$$

В результате совместного рассмотрения уравнений (2.23) получим выражения произвольных постоянных С/ (/ = 1,2,3,4), представленное в следующем виде:

$$C_1 = \frac{\Phi_R - \Phi_1}{\Gamma}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\mu}. \qquad C_2 = -\frac{2\varphi_0 + \varphi_1}{j} + i\varphi\left(\frac{3}{\lambda}\right)^{\mu}$$

$$C_3 = \Phi_0; \quad c_4 = y_0.$$

Далее определим выражения Mu Q

2

$$M = -EJ\chi = -EJ\,(6C_1X + 2c_2);$$

$$Q = -EJ\frac{d^3v}{dx^3} = -EJ \cdot 6q. \qquad (2.24)$$

Для примера вычислим значения Ми Q*B* концевых сечениях для балки с двумя защемленными концами при $\varphi_0 = 1$. В данном случае имеем: $U = V = Y_0 = 0$.

Подставляя эти значения в (2.24) получим

$$M_0 = -EJ\cdot 2C_2 = -2 \cdot 4 \cdot \lambda; \qquad Q_0 = -6\,\text{£}/c, =$$

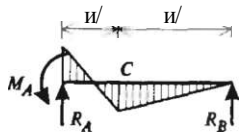
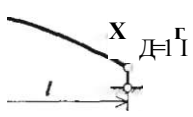
$$M_1 = -2yj = 2\lambda; \qquad G_1 = G_0 = -6\lambda -$$

Результаты расчетов эпюры моментов и поперечных сил для однопролетных статически неопределимых балок с различными граничными условиями их закрепления и при различном характере кинематического нагружения обобщены в таблице 2.4 (пп. 3, 4, 8, 9). Причем ординаты эпюры моментов отложены со стороны растянутого волокна.

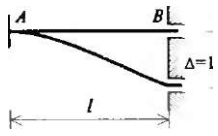
Для определения эпюры моментов в однопролетных статически неопределимых балочных элементах основной системы от действия внешних сил, удобно применить метод сил. Так, например, однопролетная балка, изображенная на рис. 2.14, б, трижды статически неопределима. А балка, изображенная на рис. 2.14, *в,* один раз статически неопределима.

Для удобства результаты расчетов эпюры моментов однопролетных статически неопределимых элементов, с различными граничными условиями их закрепления, от действия наиболее часто встречающихся силовых и температурных нагружений, обобщены в таблице 2.4 (пп. 1, 2, 5, 6, 7, 10).

Таблица 2.4

№ n/n	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов'^ и реакции	Формулы
и/ . к/ *			M_A=-\PH2)v[l-v^i) Mq = (/V/2)u^2 i>(3 - И); R_A=*(PV!1)V[3-I,^{2});* /J$_b$ = />h^2[U(«>/2)] =
1 У^М/v у у у У Ь 4А.	А, ЛВ1		M_A=-ql^1!8; ЛИг = 3?//8
4)^=1	I j p i i P ^ - i Т/Г « J		M_A = 3EJjl; R_A=-R_B=-3EJ/I^2
	^IIIIlninilELa^ 1		M_A=-3EJ/r R_A=-R_B = 3 EJ/l^1
Неравномерный нагрев И 'l B ЛГ=/]-Г$_2$ '2 -А-	(р щ ш ш ш ^ • ** I		M_A=3EJabt/(2h);$^{2)}$ R_A=-R_B = 3EJabt((2hl)
6. 1 ! L.			= -KI>^{2} P1; M_B=u^{2}vPI, M_c=2u^2 v^2 />/ , R_A =V^2(1 + 2U)P; R_b=U^2(1 + 2V)P
7. f v v v v v w v i— 4 9 fij-			M_A=-M_B = -ql^2/12; R_A = R_B~qll2
8.	sL — -l		= 4 £/// ЛД = 2£///, R_A=-R_B = -bEJ(l^2

Продолжение табл. 2.4

№ п/п	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов" и реакции	Формулы
9.		M_A R_BV	$M_A = M_в = -Ш/Г$ $R_a = -R_b = \2EJ\ 11^3$
10.	Неравномерный нагрев \Л h в{_ д/=/,-/,	M_A $M_в$	$M_A = M_в = £УаД//(2й)$ 2) $*_Л = *_в = 0$

Примечание. 1) *ординаты отложены со стороны растянутого волокна;*
2) Л - высота поперечного сечения; а - температурный коэффициент линейного расширения.

При неравномерном нагреве по высоте поперечного сечения балки и при равномерном нагреве по ее длине, изгибающие моменты и поперечные силы определяются согласно общеизвестных выражений

$$M = \frac{At}{Л} <!\sim^{x} hEj- \qquad Л /$$

где а — температурный коэффициент линейного расширения; ***h*** **—** высота поперечного сечения; х — независимая переменная $0 < x < /$; I — длина элемента.

В заключении заметим, что применяя метод перемещений, следует твердо придерживается какого-либо определенного правила знаков. Принять, что углы поворота опорного сечения, а также реактивный момент, действующий на балку со стороны заделки, положительны, если в результате оси поворачиваются по часовой стрелке. Линейное смещение узла принято положительным, если оно совпадает по направлению с положительной реакцией, вызывающей растяжение опорного сечения стержня.

2.8. Пример расчета плоской рамы методом перемещений (задача № 8)

Рассчитаем плоскую раму (рис. 2.15, а) методом перемещений и выполним при этом все необходимые проверки. Последовательность расчета следующая.

1. Определение степени кинематической неопределимости

Степень кинематической неопределимости определяем по формуле

$$« = n_y + n_л ,$$

где n_y — число неизвестных углов поворота, равное всегда количеству жестких узлов рамы, исключая опорные; $n_л$ — число независимых линейных перемещений узлов рамы, равное степени геометрической изменяемости шарнирной схемы рамы, полученной из заданной путем введения во все жесткие узлы, включая опорные, полных шарниров.

В заданной раме n_y = 1. Для определения $n_л$ вводим во все жесткие узлы, включая опорные, полные шарниры и находим степень геометрической изменяемости полученной шарнирной схемы рамы (рис. 2.15, б) по формуле

$$n_л = \backslash У = 2У - \quad C - \quad C_{0},,$$

где У= 5 — число узлов в шарнирной схеме рамы, включая и опорные; C = 4 — число стержней в шарнирной схеме рамы; $C_{оп}$ = 5 — число опорных связей с землей шарнирной схемы рамы.

$$n_л = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 1 .$$

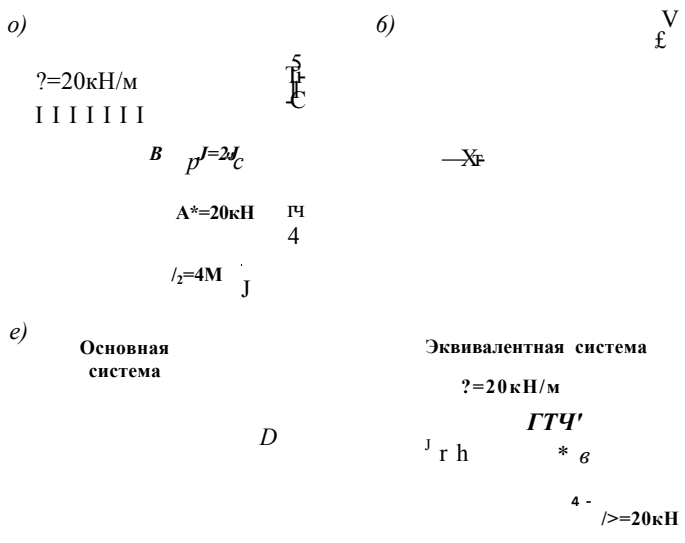


Рис. 2.15

Полученное значение говорит о том, что шарнирная схема один раз геометрически изменяема. Действительно, под действием силы *P* узлы *A, B* и *D* могут переместиться влево, так как левый конец ригеля АВ этой системы опирается на шарнирно-подвижную опору *A,* не препятствующую этому перемещению.

Таким образом, заданная рама имеет одно угловое и одно линейное неизвестное перемещение, а общее количество неизвестных будет равно двум:

$$n = n_у + n_л = 1 + 1 = 2.$$

Заданная рама дважды кинематически неопределима.

2. *Получение основной и эквивалентной систем метода перемещений*

Основную систему метода перемещений получаем путем постановки дополнительной заделки в узле *B,* препятствующей неизвестному угловому перемещению, и дополнительного горизонтального опорного стержня в опоре *A,* препятствующего неизвестному линейному перемещению (рис. 2.15, в).

Загрузив основную систему внешней нагрузкой и неизвестными перемещениями Z_1 и Z_2, равными по величине действительным перемещениям заданной системы, получим эквивалентную систему, деформирующуюся тождественно заданной (рис. 2.15, *г).*

3. Составление канонических уравнений метода перемещений

Как было указано выше, суммарная реакция в каждой дополнительно введенной связи от всех действующих в эквивалентной системе факторов равна нулю, так как эквивалентная система полностью совпадает с заданной (в которой эти связи отсутствуют), и реакций в них быть не может.

В развернутом **виде канонические уравнения имеют вид**:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

4. *Вычисление коэффициентов канонических уравнений и проверка правильности их вычисления*

4.1. *Определение коэффициентов канонических уравнений*

Для определения коэффициентов необходимо построить единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений. Для их построения используются таб-

лицы эпюр изгибающих моментов и реакций статически неопределимых балок (см. табл. 2.4).

Единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов, построенные в основной системе для рассматриваемого примера, показаны на рис. 2.16, ***а,*** в, ***д.***

Для определения реактивного момента Оь возникающего в дополнительно поставленной заделке узла В от поворота этого узла на угол $Z\backslash = 1$, вырезаем узел B из эпюры $M\backslash$ (рис. 2.16, *б)* и решаем уравнение равновесия $"LM_{y3} = 0$:

$$\text{Гц} - 1.5\,EJ_C - 1.5\,EJ_C - EJ_C = 0, \text{ откуда } r_n = 4EJ_C .$$

Реактивный момент в дополнительно поставленной заделке узла B от линейного смещения $Z_2 = 1$ узлов B и С определяем из условия равновесия $I]M_{y3} = 0$ узла B, вырезанного из эпюры M_2 (рис. 2.16, *г):*

$$02 - 0.375\,EJ_C = 0, \quad 02 = 0.375\,EJ_C .$$

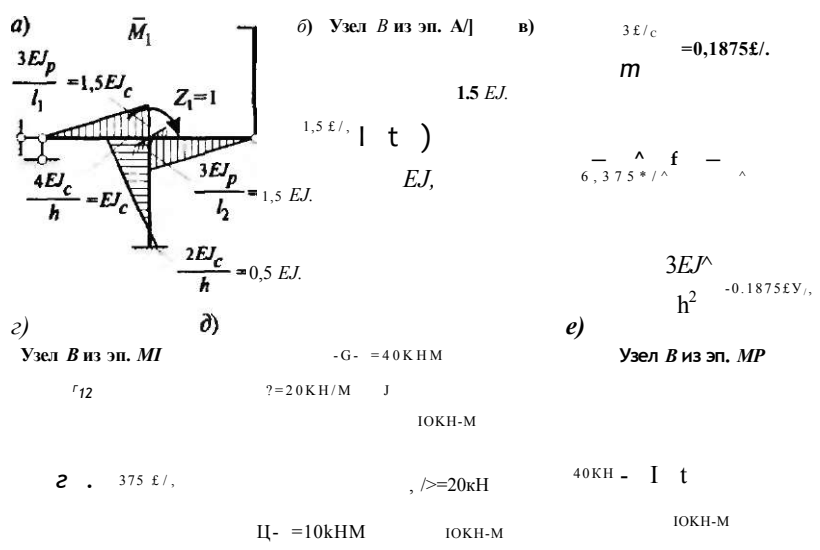


Рис. 2.16

Такая же по величине, согласно теореме о взаимности реакций, будет и реактивная сила $г_2\backslash$, возникающая в дополнительно поставленном горизонтальном стержне опоры A от поворота заделки узла B на угол $Z\backslash — 1:$

$$02 = \text{Гп} = 0.375\,EJ_C.$$

Реактивный момент R\pq, возникающий в заделке узла B *от* внешних нагрузок Р и д, найдем из уравнения равновесия Т.$М_{уз}$ = О узла *В,* вырезанного из эпюры M_{Pq} (рис. 2.16, *е*):

$$R\backslash \boldsymbol{Pq} - 40 + 10 = 0; \qquad R_{lPq} = 30 \text{ кН-м}.$$

Реактивное усилие $г_{22}$, возникающее в горизонтальном опорном стержне *опоры А* от перемещения узлов *В* и *Сна величину* Z_2 = 1, найдем, проведя разрез I—I на эпюре M_2 (см. рис. 2.16, в) и определив действующие в местах сечения элементов горизонтальные усилия (рис. 2.17, а), из уравнения равновесия EZ= 0:

$$-г_{г2} + 0.18\text{-}5\ EJ_C + 0.0468\text{-}5\ EJ_C = 0, \qquad r_{22} = 0.02344\ EJ_C .$$

а)

0,0469£/с 6)

q= 20кН/м

'22

Т Ш П Л *D* **T Z**

lИ

^ *z a*

Q-ГРП

-р. 0,1875 *EJ.*

Рис. 2.17

Проведя разрез II—II на эпюре Mp_q (рис. 2.16, *д)* и определив горизонтальные усилия в рассеченных элементах, из уравнения Ez= 0 найдем реактивное усилие R2pq, возникающее в дополнительно поставленном опорном стержне опоры *А* от действия внешней нагрузки (рис. 2.17, б):

$$-R_{2}pq + 10\text{-}20 = 0; \qquad R_{2P}q = -10 \text{ кН}.$$

Определяя реактивные усилия, всегда следует иметь в виду, что они считаются положительными, если направления их действия совпадают с принятым направлением действия неизвестных перемещений Z\ и Z_2.

4.2. *Проверка правильности вычисления коэффициентов*

Проверка правильности вычисления главных и побочных коэффициентов канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений при расчете методом сил, т.е. проверяется удовлетворение равенства

$$2> = г_{и},$$

где $\pounds r = Гц + Г\2 + r_2\ + r_{22}$ — сумма всех найденных единичных коэффициентов; $r_{ss} = \sum_{y=1}^{*} \int_0^{*} \frac{M_s M}{EJ} dz$ — интеграл, определяемый по правилу Верещагина, т.е. умножением суммарной единичной эпюры M_s ($M_s = My + M_2$) на себя.

Удовлетворение этого равенства свидетельствует о правильности вычисления главных и побочных коэффициентов.

Таким образом, для выполнения этой проверки, называемой универсальной, необходимо построить суммарную единичную эпюру изгибающих моментов в основной системе метода перемещений $M_s = M\ + M_2$. Эта эпюра обычно строится путем сложения единичных эпюр Mi и M_2.

Для данного примера она представлена на рис. 2.18, *а*.

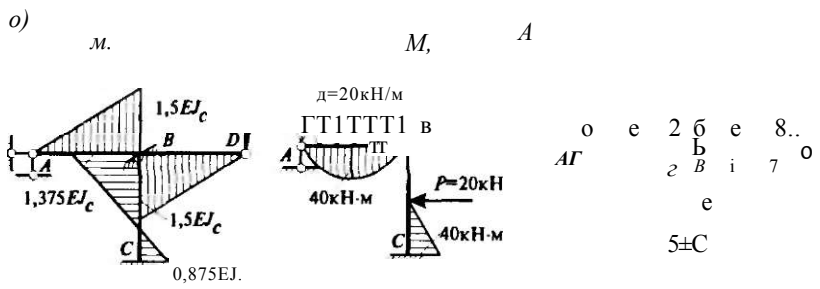


Рис. 2.18

Определив

$$Zr = AEJ_C + 0.375\pounds/_C + 0.375\pounds/_c + 0.2344\pounds/_c = 4.984\pounds/_c;$$

$$\frac{1}{EJ}\left(\frac{41.5\pounds Y_c^2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 21.5EJ_c + \frac{4\cdot 1.875\pounds Y}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1.875\pounds/_c\right) +$$

$$+ \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 0.875\pounds/_{cl}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1.375\pounds/_c - \frac{1}{2}\cdot 0.875\pounds/_c\right)$$

$$= 3\pounds/_c + 0.0469\pounds/_c + 1.9375\pounds/_c = 4.9844\pounds/_c,$$

видим, что равенство удовлетворяется. Таким образом, коэффициенты вычислены верно.

4.3. *Проверка правильности вычисления грузовых коэффициентов*

Проверка правильности вычисления грузовых коэффициентов заключается в определении суммы всех найденных грузовых коэф-

фициентов ”L”R = R_{JPq} + R_{2Pq} и величины R_{sPq} = к £ {M.M%a — - — — dz, 7=1 O EJ j определяемой по правилу Верещагина, т.е. сопряжением суммарной единичной эпюры $M_s = M\ + M_2$ с эпюрой изгибающих *моментов* Mpq , построенной в основной статически определимой системе метода сил от действия только внешних нагрузок Р и д . При правильном определении грузовых коэффициентов величины ЕЛ и R_sp_q должны быть равны, т.е. ЕЛ = R_{sPq} .

Построив эпюру Mp_q (рис. 2.18, *б),* определяем величины ЕЛ и *RsPq '•*

$$ЕЛ = R_{lPq} + R_{2Pq} = 30 - 10 = 20.$$

Сопрягая эпюру M_s с эпюрой $M°_{Pq}$ по правилу Верещагина и взяв полученное выражение со знаком «минус», определяем

$$к \quad '\{M,M°_{Pa} \qquad \Gamma \quad 1 \quad 2 \quad 1$$

$$+ \frac{1 \quad 40\text{-}2}{EJ_C \ ' \quad 2} \cdot (j \cdot 0.875\ EJ_C - 1 \cdot 0.25 \pounds 7_c j = -(-40 + 20) = 20.$$

Равенство ЕЛ = R_{sPq} свидетельствует об отсутствии ошибок при вычислении грузовых коэффициентов. Здесь же следует еше раз отметить, что при сопряжении эпюр всегда надо помнить, что элементы рамы имеют различные жесткости *(J_p = 2 J_c).*

5. *Решение системы канонических уравнений и проверка правильности вычисления неизвестных*

Подставив найденные значения коэффициентов в канонические уравнения, получим

$$4\ EJ_C \ \ Z_X \qquad + 0.375\ EJ_C \cdot \qquad + 30 = 0$$

$$0.375\ EJ_C \cdot Z_x + 0.234\ EJ_C \cdot Z_2 - 10 = 0.J$$

Решив эту систему уравнений, находим

$$13.53 \qquad „ \qquad 64.31$$

Проверку правильности решения системы уравнений произведем путем подстановки найденных значений Z_x и Z_2 в оба уравнения. В результате оба уравнения должны обратиться в тождества. Это будет

свидетельствовать о правильности решения системы канонических уравнений:

$$4EJ_c \quad \text{^ p j} + 0.375EJ_c \bullet \qquad + 30 = -54.12 + 24.12 + 30 = 0;$$

$$0.375\pounds У_c - |-\frac{\text{Ш З}}{EJJ} + 0.234\pounds/_f \bullet | - \qquad _ \text{io} = -5.074 + 15.074 - 10 = 0.$$

Оба уравнения обратились в тождества. Следовательно, система решена верно.

6. *Построение окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$ для заданной системы*

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$ для заданной системы производим на основании принципа независимости действия сил по формуле

$$Mок \sim \qquad Z\backslash + M_2 Z_2 + Mp_q,$$

т.е. путем сложения «исправленных» единичных эпюр $M\backslash$, M_2 и грузовой эпюры Mpq, построенных в основной системе метода перемещений.

Значения ординат «исправленных» эпюр $MZ\backslash$ и MZ_2 получим путем умножения ординат единичных эпюр $M\backslash$ и M_2 соответственно на значения $Z\backslash$ и Z_2, найденные в результате решения системы канонических уравнений метода перемещений, с учетом их знака. Исправленные эпюры $M\backslash\ Z\backslash$ и $M_2\ Z_2$, полученные таким образом, представлены на рис. 2.19, *а* и 2.19, *б*.

Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$ определяем по вышеуказанной формуле в табличной форме (см. табл. 2.5), предварительно приняв для этого нумерацию характерных сечений рамы и правило знаков для ординат эпюр изгибающих моментов (рис. 2.18, *в*). В ригеле 0—2 эпюра изгибающих моментов изменяется по закону квадратной параболы, так как действует равномерно распределенная нагрузка. Поэтому в ригеле может иметь место экстремальное значение изгибающего момента. Для выяснения этого рассмотрим ригель 0—2, вырезанный из статически неопределимой рамы, на который действуют равномерно распределенная нагрузка q = 20 кН/м и опорные моменты в сечении 0 $MQ = 0$ и в сечении 2 M_2 — -19.71 кН м (рис. 2.19, *в*).

Таблица 2.5

Номер сечения	*M\-Z* ,кН м	*M2 Z2,* кН м	$M_м$, кН м	*Мок,* кН-м
0	0	0	0	0
1	10.14	0	20.0	30.14
2	20.29	0	-40.0	-19.71
3	-13.53	24.12	-10.0	0.59
4	-3.38	0	10.0	6.62
4'	-3.38	0	10.0	6.62
5	6.76	-24.12	-10.0	-27.36
6	-20.29	0	0	-20.29
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	12.06	0	12.06

Аналитическое выражение изменения изгибающего момента в зависимости от текущей абсциссы *Z* для рассматриваемого элемента имеет вид

$$M(z) = Q_0(z) + M_0 - qz^{Л} \qquad (2.30)$$

Для нахождения положения сечения, в котором может возникнуть экстремальное значение изгибающего момента, приравняем первую производную изгибающего момента нулю

$$\frac{dM(z)}{dz} = Qo - gz_0 = o. \qquad (2.31)$$

Определив из уравнения равновесия $ЪM_2 = 0$ величину опорной реакции ***QQ*** **И** решив (2.31), найдем Zo, т.е. абсциссу сечения, где возникает экстремальное значение момента:

$$Qo \quad \frac{qli^2}{} \; | \; \frac{M_2 - M_0}{} = \frac{20-4}{} \; t \; \frac{-19.71-0}{} - 35.07 \text{ кН.}$$

Таким образом, $z_{ext} = Qo/q = 35.07/20 = 1.75$ м.

Подставив найденное значение ***ZQ*** = 1.75 **М В** аналитическое выражение изменения момента (2.30), определяем величину:

$$\text{M}_{max} = 35.07 \cdot 1.75 + 0 - \frac{20 \cdot 175^2}{2} = 30.75 \text{ кН м.}$$

По найденным значениям ординат строим окончательную эпюру изгибающих моментов для заданной системы (рис. 2.19, *г).*

7. *Проверка правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов* $M_{ок}$

Для того чтобы убедиться в правильности построения эпюры $M_{ок}$, производим статическую и деформационную проверки.

Для статической проверки, как и в методе сил, вырезаем незакрепленный жесткий узел B из эпюры $M_{ок}$, прикладываем действующие в нем изгибающие моменты и проверяем удовлетворение уравнения равновесия $TM_{уз} = 0$ (рис. 2.19, *д*):

$$1M_{уз} = 0, \quad 20.29 - 19.71 - 0.59 = 0, \qquad 20.29 - 20.3 = 0.$$

Следовательно, узел B находится в равновесии, что свидетельствует о правильности построения эпюры $M_{ок}$. Однако, как и в методе сил, уравнения равновесия жестких незакрепленных узлов системы иногда удовлетворяются и при неправильно построенных в основной системе единичных и грузовых эпюрах, а также неправильном вычислении величин неизвестных перемещений. Поэтому для полной гарантии правильности построения эпюры $M_{ок}$ сделаем деформационную проверку, физический смысл которой состоит в проверке отсутствия перемещений в сечениях заданной системы, в которых заведомо они отсутствуют.

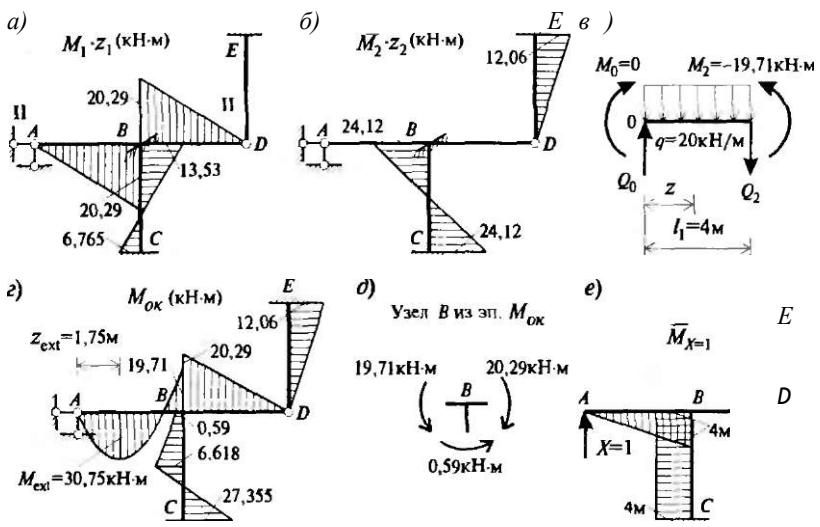


Рис. 2.19

Проверим отсутствие перемещений по направлению опорного стержня опоры A заданной системы. Выбрав основную систему метода сил и приложив единичную сосредоточенную силу X= 1 в сечении A по направлению опорного стержня, строим единичную

эпюру изгибающих моментов *Mx*=\ (рис. 2.19, *е),* после чего вычисляем интеграл Мора по правилу Верещагина. Сопрягая эту эпюру с эпюрой $M_{ок}$, получим

$$\Delta_{верт} = \frac{1}{2EJ_C}\left(\frac{0.59 + 6.62}{2} \cdot 2 \cdot д \cdot \frac{27.355 \cdot 6.618}{2} \cdot 2 \cdot Л - \frac{54.11}{EJ_C} - \frac{54.11}{EJ_C}\right)$$

Вертикальное перемещение сечения *А* отсутствует, следовательно, эпюра $M_{ок}$ построена верно.

8. *Построение эпюры Q по эпюре* $M_{ок}$

Эпюру *Q* для заданной системе по эпюре $M_{ок}$ строим, как и в методе сил, используя для определения ее ординат формулу (2.31).

Учитывая принятое правило знаков при построении эпюры $M_{ок}$, обход рамы производим слева направо, начиная с опоры *А* и находясь все время лицом к оси каждого участка рамы. Последовательность обхода показана на рис. 2.18, *в* пунктиром со стрелками.

Участок 0—2. На этом участке действует распределенная внешняя нагрузка д=20кН/м и опорные моменты $M_{пр} = M_2$ —-19.71 кН м и $M_{лев} = M_0 = 0$

$$Q_{0\text{-}2} = {}_1\wedge - + \bullet \wedge m \wedge -, \quad \text{где} \quad 0 = 4 \text{ м}.$$

Откуда, при $Z = 0$

$$Q_{0\text{-}2} = \frac{20 \cdot 4}{2} \cdot 20 \cdot 0 + \frac{-19.71 \cdot 0}{4} = 35.07 \text{ кН},$$

а при Z — 4

$$Q_{0\text{-}2} = \frac{20 \cdot 4}{2} \cdot 20 \cdot 4 + \frac{-19.71 \cdot 0}{4} = -44.93 \text{ кН}.$$

Участок 3—4. На этом участке нагрузка отсутствует, поэтому

$$= \frac{M_4 - M_3}{Л/2} = \frac{6.618 \cdot 0.59}{2} = 3014 \text{ кН}$$

Участок 4—5. Аналогично:

$$= \frac{M_5 - M_4}{Л/2} = \frac{-27.355 \cdot 6.618}{2} = \text{кН}$$

Участок 6—7. Аналогично:

$$\frac{АГ_{7} - АГ_{6в}}{'2} \quad \frac{0 - (-2Q.29)}{4} \; ^{SO72kH}$$

Участок 8—9. На этом участке нагрузка также отсутствует, поэтому

$$Щ - Щ = \frac{1206\text{-}0}{A} = \frac{}{4} = 3015\,кН$$

По найденным ординатам строим эпюру *Q* для заданной рамы (рис. 2.20, о).

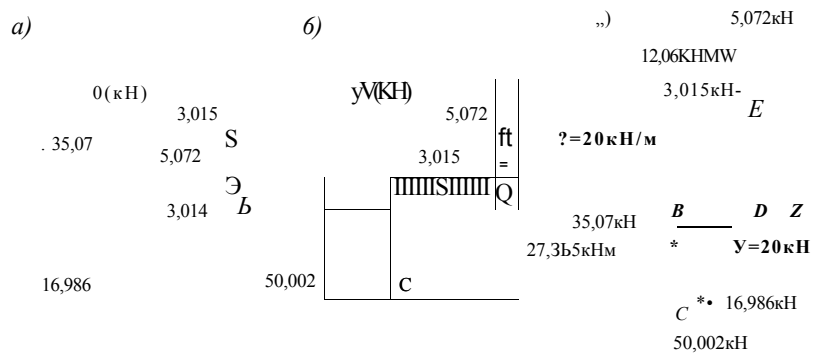


Рис. 2.20

9. *Построение эпюры N для заданной рамы*

Ординаты эпюры *N* определяем из уравнений равновесия Ez = 0 и Xy = 0 вырезанных из эпюры *Q* узлов рамы. К вырезанным узлам прикладываем действующие в них поперечные силы *Q* и искомые продольные силы *N,* составляем уравнения равновесия узлов и решив их, вычисляем ординаты эпюры *N.* При этом нормальные силы направляем от узла, предполагая, что все элементы рамы растянуты, а направление поперечных сил принимаем согласно следующему правилу: если поперечная сила положительная, то она должна вращать узел по ходу часовой стрелки, а если отрицательная - то против хода часовой стрелки.

Узел D (рис. 2.20, *а):*

Xz = - Л ^ + 3.015 = 0; ***NM*** = 3.015 кН (растяжение);

Ey = Ng_{-9} + 5.0-2 = 0; $Ng._{9}$ = -5.072 кН (сжатие).

Узел &.

I z = 3.015 - 3.014 - N_2-***O*** = 0; N_2-o = 0;

Y.y = -5.072 - 44.93 - /V_{3_5} = 0; N^$_s$ = 50.02 кН (сжатие).

По найденным ординатам строим эпюру *N* (рис. 2.20, б).

10. *Статическая проверка рамы в целом*

Для выполнения этой проверки необходимо убедиться в справедливости трех уравнений равновесия Ez = 0; Ъу = 0; ЕЛ/ = 0 для любой отсеченной части рамы. Отсечем заданную раму от всех опор и приложим в местах сечений действующие в них силовые факторы, величины и направления которых берем из эпюр $M_{ок}$. *Q и N* (рис. **2.20, *в*).**

Составив уравнения равновесия, проверяем их удовлетворение, т.е. обращение их в тождество:

Ez = 3.015 + 16.986 - 20 = 0, 0 = 0;

Ej> = 50.002 + 35.07 - 5.072 - 20-4 = 0, 0 = 0;

$ЕЛ/_С$ = 35.07-4 - 20-4-2 + 27.355 - 20-2 - 12.06 + 3.015 8 + 5-2-4 = 0,

0 = 0.

Все уравнения обратились в тождества, следовательно, рама находится в равновесии и эпюры *Q, N* и $M_{ок}$ построены верно.

2.9. Расчет неразрезной балки методом сил. Уравнение трех моментов

Неразрезной балкой называется статически неопределимая балка, в пролете опирающаяся в пролете на конечное число шарнирных опор. Крайние сечения неразрезной балки могут быть свободны, заделаны или шарнирно оперты. Одна из опор неразрезной балки имеет связь, препятствующую смещению балки вдоль ее оси.

Расчет неразрезной балки (рис. 2.21, *а)* можно выполнить, как и любой статически неопределимой системы, методом сил. Основную систему для расчета неразрезной балки получим, удалив из нее связи, препятствующие взаимному повороту смежных сечений балки над ее опорами, т.е. поместив шарниры в опорных сечениях балки (рис. 2.21, б).

Неизвестными являются изгибающие моменты, возникающие в сечении неразрезной балки над опорами.

Выделим из основной системы четыре примыкающих друг к другу пролета со средней опорой номером п и построим единичные и грузовые эпюры (рис. 2.22). Из анализа единичных эпюр видно, что в любом каноническом уравнении только три единичных коэффициента будут отличны от нуля. Напишем одно из канонических уравнений в общем виде

а)

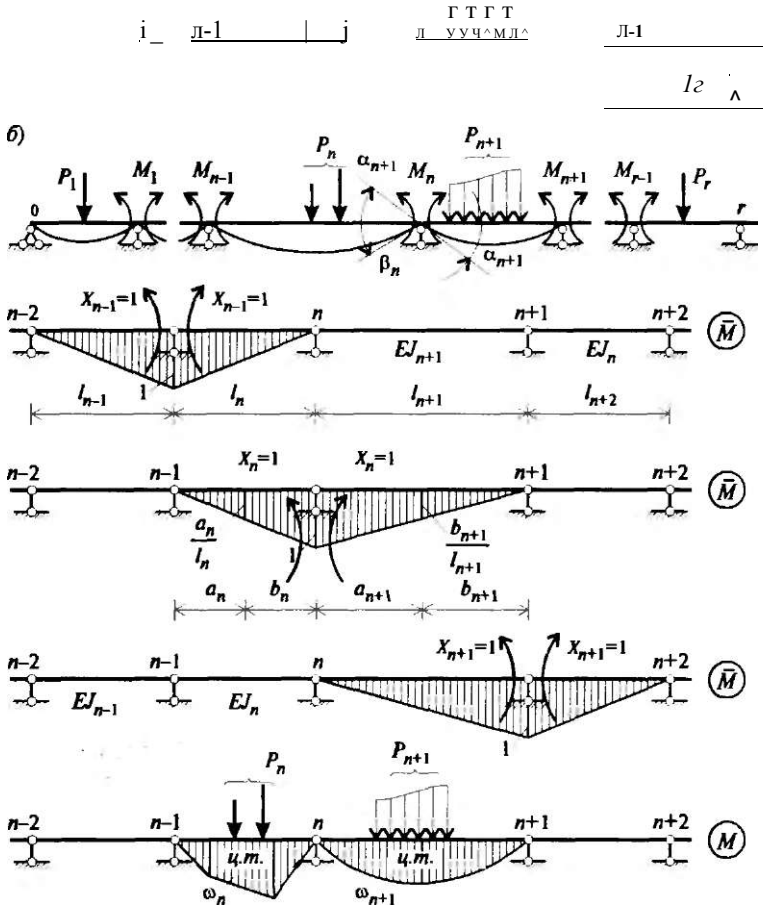


Рис. 2.21

$$б_{л,л-1}\, Xn\text{-}1 \;+\; 5_{,,>л}\, A'я \;+8_{,,,,+1}\, X_{,,}+i \;+\; A_{n}p \;=\; 0. \qquad (2.32)$$

Подсчитаем единичные и грузовые коэффициенты, применяя правило Верещагина «перемножения» эпюр:

$$Чл\text{-}1 = \frac{1}{EJ_{,,}}\left(\frac{1}{2}\,Л\,\frac{1}{3}\,–\,/_{,,}\right) 6£/_{,,}\,'$$

$$\text{(2.33)}$$

Подставив найденные коэффициенты в (2.32), получим

$$\text{(2.34)}$$

$$\frac{\text{^л • °л}\quad \text{^л+1 • К+1}}{EJ_{,,}l_{,,}\ EJ_{n}+\backslash\ 1/1+1}$$

В случае балки постоянного сечения $J\backslash = Jj = \ldots = У_я =$ и введя обозначения $X_{,,}_\backslash = M_{n}.\backslash;\ X_{,,}- M_{,,}\ ;\ X_{n+}\backslash = M_{n}+\backslash$, получим

$$M + 2Л/_{,,}\ (/_{,,} + /_{я+1)}) + M_{,,+}i\ /_{я+1} = - - \text{^ ^ L}\ _\ 1\ \text{^} \pm I\ A \pm L\ . \quad (2.35)$$

Это и есть *уравнение трех моментов* для неразрезной балки постоянного сечения. В этом уравнении неизвестными являются изгибающие моменты на опорах. Если у неразрезной балки все опоры шарнирные, то таких уравнений можно составить столько, сколько у балки промежуточных опор.

При наличии на концах балки нагруженных консолей, изгибающие моменты на крайних опорах войдут в уравнение трех моментов, как известные величины, а при отсутствии консолей эти моменты будут равны 0.

Если конец неразрезной балки защемлен, то для применения уравнения (2.35) необходимо, отбросив заделку, ввести с ее стороны дополнительный пролет ***IQ*** = 0 (рис. 2.22). Такая система будет деформироваться также, как балка с жесткой заделкой.

Решая совместно, составленные таким образом уравнения, найдем все неизвестные изгибающие моменты на опорах. Далее для по-

строения эпюр Л/ и *Q,* каждый пролет неразрезной балки рассматриваем как балку на двух шарнирных опорах, загруженных внешней нагрузкой и двумя опорными моментами. Ординаты эпюр могут быть подсчитаны по формуле

$$M = Mp + M_{n_i} \quad + M_{п} \quad , \qquad (2.36)$$

где *Mp* и *Qp* - ординаты эпюр *M* и *Q* от внешней нагрузки в основной системе.

Чтобы убедиться в правильности построения эпюр *M* и *Q* необходимо провести проверку равновесия неразрезной балки по уравнениям: Ey = 0; ЕЛ/ = 0.

Для этого следует определить вертикальные опорные реакции неразрезной балки, используя эпюру *Q*

$$Rn = (\ T_{г}\Gamma - O\Gamma - \qquad (2\text{-}37)$$

2.10. Построение линий влияния опорных моментов кинематическим методом

Для построения линии влияния какого-либо усилия 5,- кинематическим методом необходимо в сооружении нарушить ту связь, которая передает это усилие, и заменить нарушенную связь усилием 5,-. В полученной основной системе перемещение по направлению нарушенной связи от действия подвижной одиночной силы и усилия Si должно равняться нулю

$$b_{ti}\ 5, + b_{iP} = 0, \qquad (2.38)$$

откуда $S. = \frac{8/p}{5,7}$

Учитывая, что на основании теоремы о взаимности перемещений &iP = 8pj, окончательно получим

$$5\ , = -\ ^{\wedge}\ , \qquad (2.39)$$

где Ьп — перемещение по направлению подвижной единичной нагрузки от усилия *Sj* = 1.

Например, если необходимо определить линию влияния опорного момента в п-м опорном сечении многопролетной балки,

расчетная схема заданной и основной системы принимает вид, показанный на рис. 2.23.

Если подвижная единичная сила занимает произвольное положение, то *8р,* представляет собой эпюру перемещений (упругую линию) основной системы от усилия 5, = 1.

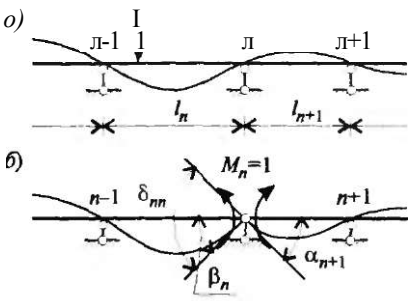


Рис. 2.23

Перемещение *8ц* от усилия Si — 1 по направлению этого же усилия является величиной постоянной и называется масштабом эпюры перемещений.

Изобразив примерный вид упругой линии основной *системы от* усилия S{, получим очертание линии влияния усилия 5/, так называемую модель линии влияния 5;. Таким образом, кинематический метод дает возможность быстро получить внешний вид (модель) любой линии влияния.

Для построения линии влияния усилия 5/ необходимо вычислить ординаты упругой линии основной системы от усилия 5,- и поделить их на постоянную величину *(~8ц)*

Рассмотрим примеры построения линий влияния усилий в неразрезной балке кинематическим методом. Применим кинематический метод к построению линии влияния опорного момента M_2 неразрезной балки (рис. 2.24, а).

Для получения основной системы в сечение балки над опорой 2 введем шарнир и заменим нарушенную связь парными моментами $M_2 \sim 1$ (рис. 2.24, ***в).*** Уравнение совместности деформаций имеет вид 822 $M_2 + \delta_2 p = 0$, из которого следует, что

$$м_2 = -\frac{}{6\,22\qquad 0_{22}} \tag{2.40}$$

В основной системе каждый пролет можно представить как балку на двух шарнирных опорах, нагруженную одним или двумя опорными моментами.

Уравнения прогибов и углов поворота для балки на двух опорах с одним опорным моментом М= 1 (см. рис. 2.25) можно легко рассчитать методом начальных параметров. Вводя обозначение £ = $z j l$, получим

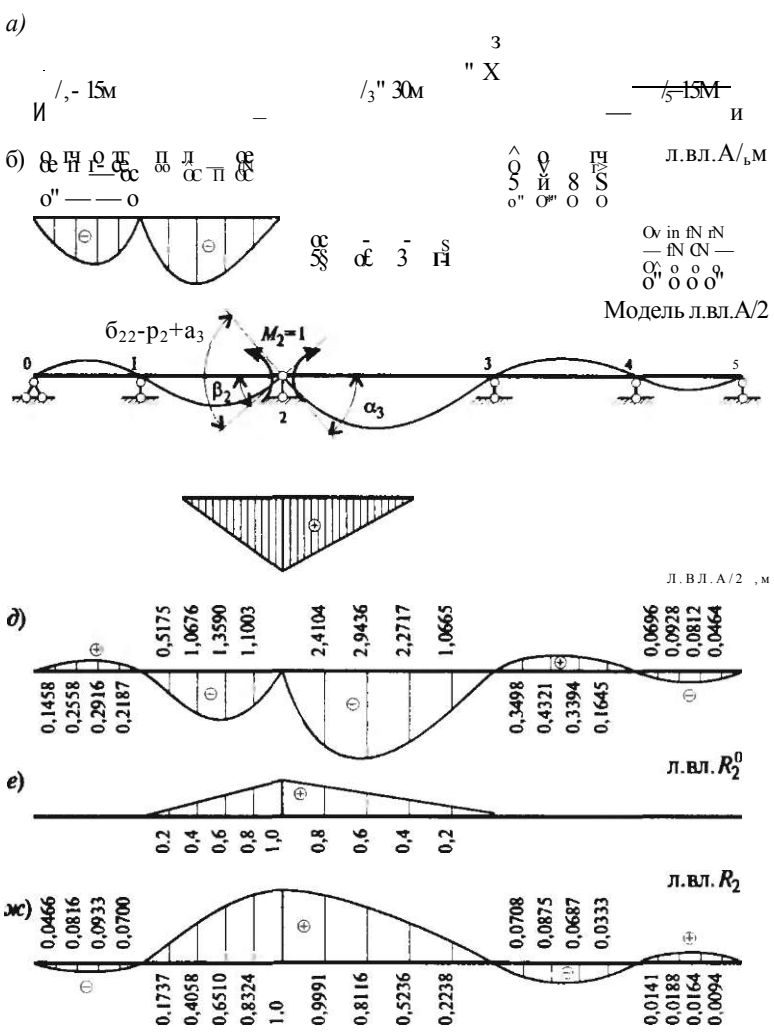


Рис. 2.24

(2.41)

6 *EJ*

Для облегчения подсчета ординат эпюры прогибов Mpi на рис. 2.25 показана упругая линия балки на двух шарнирных опорах,

нагруженной одним опорным моментом М— 1, и указаны углы поворота на опорах и прогибы через 0.2/.

Как видно из рис. 2.24, б, (п = 2) перемещение 822 представляет собой взаимный угол поворота двух смежных сечений основной системы на опоре
п = 2. Этот угол можно подсчитать также, используя упругую линию балки на двух опорах, показанную на рис. 2.25.

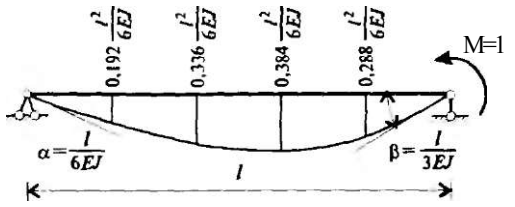


Рис. 2.25

Запишем систему уравнений трех моментов (исключая для опоры 2) для определения изгиоающих моментов на опорах от действия Л/$_2$ = 1:

$$\begin{aligned} &Л/О/_1 + 2Л/_1(/_1 + /_2)+А/2/2 = 0;\\ &\bullet\ Л/_2/3 + 2Л/_3(/3 + /_4) + Л/_4/_4 = 0; \\ &Л/_3/_4 + 2Л/_4(/_4 + /_5)+ М_5/_5 = 0. \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Учитывая, что Л/о = *М$* = 0, а также, что Л/$_2$ = 1, получаем:

$$\begin{aligned} &2Л/,(15 + 20) + Л/_2 \bullet 20 = 0;\\ &\bullet\ Л/_2 \bullet 30 + 2Л/_3(30 + 20)+ Л/_4 \bullet 20 = 0;\\ &{}_{А/3} \bullet 20 + 2А/_4(20 + 15) = 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим *М*\ = -20/70 = =-0.286кН м. Подставим значение *М*\ во второе и третье уравнения и умножим последнее на -5 и сложим со вторым, получим последовательно:

3-33-Л/$_4$ = 0, т.е. Л/$_4$ = 3/33 = 0.091 кНм и 2Л/$_3$ = -7/11, или Л/$_3$ = -7/22 = -0.318 кН м.

По данным рис. 2.23 подсчитаем взаимный угол поворота смежных сечений основной системы на опоре 2:

$$R \quad -B \quad +a \quad -\zeta^{M}2h_{+}Mll2\backslash \quad JMl!l_{+} \quad Mlll\backslash-$$

$$\sim I\ 3EJ^{+} \quad 6EJ \quad J^{+}1\ 3EJ^{+} \quad 6EJ \quad) \quad EJ$$

Используя рис. 2.25, вычислим для каждого пролета ординаты эпюры моментов (упругой линии) основной системы &Р2. Расчеты будем вести в табличной форме (см. табл. 2.6, где следует учесть, что ординаты линии влияния умножены на *EJ)*.

Поясним методику-заполнения таблицы.

Основная система расчленяется на балки на двух опорах при действии двух опорных моментов $M_{лев}$ и $M_{прав}$. По принципу независимости деформаций Бетти, прогибы балки подсчитываются независимо, как сумма прогибов от действия одного опорного момента (см. рис. 2.25 или формулы 2.34):

&2Р = Ь"*[1] + Ъ[прав]- = - 3 - i - + - 3+ ,

где =

Таким образом, заполняются столбцы 3, 4 и 5 таблицы 2.6. В столбце 6 записываются ординаты линии влияния M_2, подсчитанные по формуле (2.41). На рис. 2.25, *д* приведена линия влияния M_2.

Для построения линий влияния изгибающих моментов и поперечных сил в сечении неразрезной балки используются зависимости:

$$M_к = м°_к + M_{пЛ} \cdot {}^{l}JLZ\hat{}L + Л/_{„} - \hat{}; \qquad (2.43)$$

$$Q_k = Q°_k + \frac{M \; » \; - \; M \; » \; -}{•л} \quad (2.44)$$

где $M_к$ и Q_k — ординаты эпюр Л4 и Q_k от внешней нагрузки в сечении к балки пролетом $/_{„}$ на двух шарнирных опорах; M_n и $M_{„}.\backslash$ — линии влияния опорных моментов неразрезной балки.

Ординаты линии влияния опорной реакции $R_{„}$ подсчитываются по формуле

$$R_n = R°_n + \frac{M \; » + y \; M \; »}{'и+1} - \frac{M \; » - M \; » - Г}{'л}, \qquad (2.45)$$

где Л® — линия влияния реакции шарнирной балки *n,* если эту эпюру рассматривать как общую для двух простых балок пролетом *In* и W

На рис. 2.23, *е, ж* приведены линии влияния опорных реакций R_2 **И** R_2 для неразрезной балки, приведенной на рис. 2.23, *а.*

Таблица 2.6

Часть балки	Сечение z	Момент на опоре приложен слева, Г ' Д (ч.	Момент на опоре приложен справа управ. « ч « 0 у	Момент на опоре приложен и слева и справа	Ординаты линии влияния, Ml
Пролет 0-1	0	0	0	0	0
	0.2	0	-2.0592	-2 0592	0 1458
	0 4	0	-3.6063	-3 6063	0.2551
	0.6	0	-4.1184	-4.1184	0.2916
	0.8	0	-3.0888	-3 0888	0.2187
	1.0	0	0	0	0
Пролет 1-2	0	0	0	0	0
	0.2	-5.4912	12.800	7.3083	-0.1575
	0.4	-7.3216	22.400	15 078	-1.0676
	0.6	-6 4046	25 600	19194	-1.3590
	0.8	-3.6608	19.200	15.539	-1.1003
	1.0	0	0	0	0
Пролет 2-3	0	0	0	0	0
	0.2	43.200	-9158	34.042	-2.4104
	0.4	57.600	-16.027	41.573	-2.9436
	0.6	50.400	-18.317	32.083	-2.2717
	0.8	28 800	-13.738	15 062	-1.0665
	1.0	0	0	0	0
Пролет 3-4	0	0	0	0	0
	0.2	-61056	1.1648	-4.9408	0.3498
	0.4	-8.1408	2.0384	-6 1024	0 4321
	0.6	7.1232	2 3296	-4.7936	0.3394
	0.8	4.0704	1.7472	-2.3232	0.1645
	1.0	0	0	0	0
Пролет 4-5	0	0	0	0	0
	0.2	0.9828	0	0.9828	-0.0696
	0.4	1.3104	0	1.3104	-0.0928
	0.6	1 1466	0	1 1466	-0 0812
	0.8	0.6552	0	0.6552	-0 0464
	1.0	0	0	0	0

2.11. Расчет неразрезной балки на действие постоянных и временных нагрузок (задача № 9)

Для неразрезной балки постоянного поперечного сечения (рис. 2.26, *а)* требуется:

1. Построить эпюру изгибающих моментов от заданной постоянной нагрузки с помощью уравнений трех моментов.

2. Построить линии влияния опорных изгибающих моментов *М*\, M_2 и изгибающего момента в сечении, расположенном посередине пролета 1_2.

3. По линиям влияния, полученным в п. 2 проверить ординаты эпюры А/, полученной в п. 1.

4. От временной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q = 10 кН/м (может располагаться с разрывами в нескольких / пролетах балки) и заданной постоянной нагрузки построить объемлющую эпюру изгибающих моментов для пролета 1_2.

Решение

1. Построение эпюры изгибающих моментов

Для составления уравнений трех моментов получим основную систему путем введения в заданную неразрезную балку шарниров над всеми промежуточными опорами, предварительно заменив заделку дополнительным пролетом длиной $/_4$ = 0. Кроме того, заменим консоль с нагрузкой внешним сосредоточенным моментом ***MQ***. Полученная основная система показана на рис. 2.26, б. Напишем уравнения трех моментов для промежуточных опор:

$$\begin{aligned} &M_0 l_x + 2M_x\ (/, + /_2) + M_2 l_2 = -6\,Sf - 6\,Af; \\ &\bullet\ \mathrm{M_x l_2} + 1\mathrm{M_2}\ (\mathrm{l_2} + /_3) + \mathrm{Л}/_3\ /_3 = -6\,Bf - 6\,Af\backslash \\ &M_2\ /_3 + 2M_{\text{ъ}}\ (/_3 + /_4) + M_4 l_4 = -6Bf - 6\,A\,f. \end{aligned} \qquad (2.46)$$

$$0\ 72^2$$

В этих уравнениях: M_0 = -5.0-0.72 -12.5 • $\frac{\cdot}{\triangle}$ = 6.84 кН м; M_4 = = 0: $/_4$ = 0.

Построим эпюру изгибающих моментов в основной системе от заданной внешней нагрузки. Она представляет собой сочетание эпюр изгибающих моментов для всех пролетов балки, если каждый из них рассматривать как балку на двух шарнирных опорах. Указанная эпюра показана на рис. 2.26, *в.* Используя эту эпюру, найдем фиктивные опорные реакции (увеличенные в *EJ* раз) для каждого пролета балки:

$Af = Bf$ = i • 20.25 З.б] = 24.3 кН-м^2;

$Af = Bf$ $Л_i^{24-6-}{}_2^{-}]$ = 36.0 кНм^2;

= =I.^|.21.6-4.8j = 34.56 кНм^2;

Af = < =0.

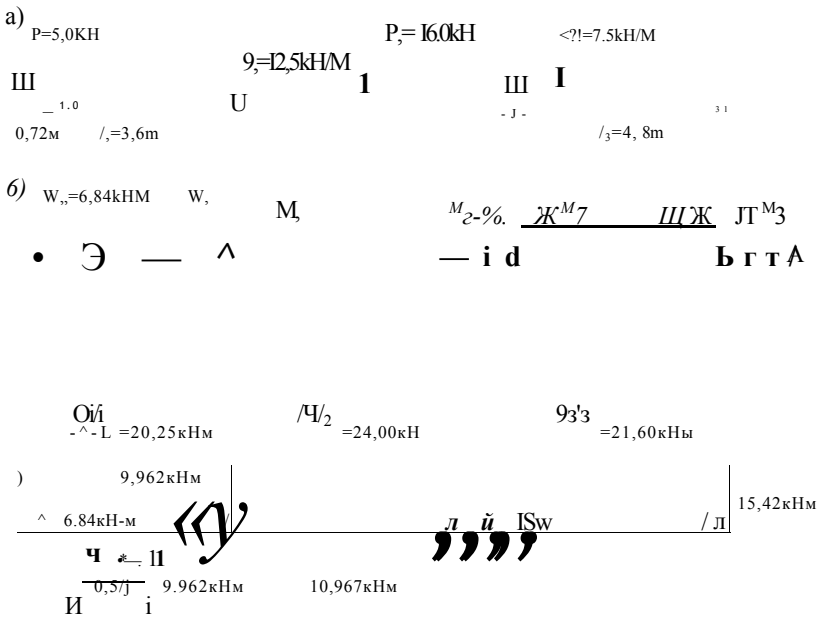


Рис. 2.26

Подставляя все известные числовые величины в систему уравнений (2.46), получим

$$-6.8\ \ 3.6 + 2 \cdot (3.6 + 6.0) \cdot M_x + 6.0\ \ M_2 = -6 \cdot 24.3 - 6 \cdot 36.0;$$

$$6.0 \cdot M_x + 2 \cdot (6.0 + 4.8) \cdot M_2 + 4.8 \cdot M_3 = -6 \cdot 36.0 - 6 \cdot 34.56;$$

$$4.8 \cdot Л/_2 + 2\text{-}4.8\text{-}Л/_3 = 6\text{-}34.56.$$

После несложных преобразований получим

$$
\begin{aligned}
19.2 - M_x + 6.0 \cdot M_2 &= -337.176;\\
6.0 \cdot M_x + 21.6 \cdot M_2 + 4.8 \cdot M_3 &= -423.36;\\
4.8\ M_2 + 9.6\ M_3 &= -207.36.
\end{aligned}
\qquad (2.47)
$$

Умножив обе части второго уравнения на 2 и вычитая третье уравнение, получим

$$12.0\ Mi + 38.4\ M_2 = -639.36.$$

Учитывая первое уравнение системы (2.47), получим

$$
\begin{aligned}
&Г19.2 - Mi + 6.0 \cdot M_2 = -337.176;\\
&12.0\ Л/, + 38.4Л/_2 = -639.36.
\end{aligned}
\qquad (2.48)
$$

Решая полученную систему (2.7.3), найдем

$$M_x = -13.696\ кНм; \quad M_2 = -12.370\ кН\ м.$$

Подставляя значение M_2 в третье уравнение системы (2.47), найдем

$$M_ъ = -15.420\ кН\text{-}м.$$

Для проверки решения подставим найденные величины $M\backslash$, M_2 и M_3 в каждое из уравнений системы (2.47):

$$19.2\,(-13.696) + 6.0\,(-12.370) = -337.183\ «\ -337.176;$$

$$6.0(-13.696) + 21.6(-12370) + 4.8(-15.420) = -423.384\ *\ -423.36;$$

$$4.8\,(-12.370) + 9.6\,(-15.420) = -207.410\ »\ -207.36.$$

Результаты проверки подтверждают правильность нахождения неизвестных $M\backslash$, M_2 и My . По полученным данным построим эпюру опорных моментов (на рис. 2.26, *г* показана пунктиром). Отложив от пунктирной линии ординаты эпюры изгибающих моментов в основной системе, которая показана на рис. 2.26, в, получим эпюру изгибающих моментов от постоянной внешней нагрузки для заданной неразрезной балки (рис. 2.26, г).

2. *Построение линий влияния опорных моментов Mi и M_2 и изгибающего момента в сечении, расположенном посередине пролета 1_2*

Согласно общей методике, изложенной в п. 2.10, для построения линий влияния Mi кинематическим методом, необходимо в балке нарушить ту связь, которая передает это усилие, и заменить нарушенную связь моментом $M\backslash$.

Изобразив примерный вид упругой линии основной системы от усилия M\ = 1, получим модель линии влияния момента M\ .

Запишем систему уравнений трех моментов (исключая для опоры 1) для определения изгибающих моментов на опорах от действия $M\backslash = 1$:

$$M_X 1_2 + 1M_2\ (/_2 + /_3) + л/_3/_3 = °;$$

$$Л/_2/_3 + 2Л/_3\ (/_3 + /_4) = 0.$$

Учитывая, что /4 = 0, а M\ = 1, получим

$$21.6\ Л/_2 + 4.8\ Л/_3 = 0;$$

$$4.8\ M_2 + 9.6\ Л/_3 = 0.$$

Из второго уравнения имеем: $M_2 = -2A/_3$.

Подставив это значение в первое уравнение получим

$$Я.6\text{-}(-2Л/_3) + 4.8Л/з + 6 = 0,\ \text{откуда}\ Л/_3 = = 0.1563\ \text{кН-м}.$$

Далее $M_2 = -2 - 0.1563 = -0.3125$ кН м.

По данным рис. 2.23 подсчитаем взаимный угол поворота смежных сечений основной системы на опоре 1:

$$\sim \frac{[1.0\text{-}3.6 \quad 0 \cdot 3.6)}{I\ 3EJ \quad 6EJ\ J} + \frac{(1.0\text{-}6.0 \quad -0.3125 \cdot 6.0) \quad 2.8875}{1\ 3EJ \quad 6EJ \quad EJ}$$

Расчеты будем вести в табличной форме (табл. 2.7, где ординаты линии влияния умножены на число *EJ).*

Аналогично строим линию влияния опорного момента M_2. Запишем систему уравнений трех моментов (исключая для опоры 2) для определения изгибающих моментов на опорах от действия M_2 — 1:

$$M_0 1_X + 2M_X\ (/_1 + /_2) + Л/_2/_2 = 0;$$

$$M_2\ /_3 + 2Л/_3\ (/_3 + /_4) = 0.$$

Учитывая, что $/_4 = 0$, а $M_2 = 1$, получим

$$|2Л/, \quad (4.8 + 6) + 6\text{-}2.592 = 0;$$

$$\{ \qquad 9.6Л/3 + 4.8 = 0.$$

Таблица 2.7

Часть балки	Сечение W	Момент на опоре приложен слева	Момент на опоре приложен справа	Момент на опоре приложен и слева, и справа	Ординаты линии влияния. M
Пролет 0-1	0	0	0	0	0
	0.25	0	0.4925	0.4925	0.17533
	0.50	0	0.7776	0.7776	0.28050
	0.75	0	0.6739	0.6739	0.24542
	1 0	0	0	0	0
Пролет 1-2	0	0	0	0	0
	0.25	1.8720	-0.5400	1.3320	0.52927
	0.50	2.1600	-0.6750	1.4850	0.53543
	0.75	1.7280	-0.5850	1.1430	0.27386
	1.0	0	0	0	0
Пролет 2-3	0	0	0	0	0
	0.25	-0.3744	0.1728	-0.2016	0.08773
	0.50	-0.4320	0.2160	-0.2160	0.07800
	0.75	-0.2736	0.1872	-0.0864	-0.02927
	1.0	0	0	0	0

Решив эту систему, получим

$$M_x = -j \wedge r = -0.2778 \text{ кНм}; \qquad M_3 = -Ц = -0.5 \text{ кНм}.$$

Взаимный угол поворота смежных сечений основной системы на опоре 2

$$8 \quad - в, .a. \quad i^{M\,l\,h} \; I^{M} M, \{ M_2 h, M_3 1_3 Л$$

$$= (\underline{1.0 \text{-}6 \quad -0.2778 \bullet} \qquad (\underline{1.0 \text{-}4.8 \quad -0.5 \bullet 4.8 \wedge} = \underline{2.9222}$$
$$Ч з EJ^{+} \qquad 6EJ \qquad J4 \quad 3EJ^{+} \qquad 6EJ \qquad EJ$$

Расчеты будем вести в табличной форме (табл. 2.8, где ординаты линии влияния умножены на число *EJ).*

Ординаты линии влияния изгибающего момента в сечении, расположенном посередине второго пролета . *определяем по* формуле

$$^{№}h/2 = {}^{д/0}/_{;/2} + M_{1\,+\,2} M_2,$$

где ординаты линии влияния изгибающего момента в сечении, расположенном посередине второго пролета, если этот пролет рассматривать как балку на двух шарнирных опорах; $M\backslash$ и M_2 — ординаты линий влияния опорных моментов М\ и .

Таблица 2.8

Часть балки	Сечение $i=*/t$	Момент на опоре приложен слева	Момент на опоре приложен справа	Момент на опоре приложен и слева, и справа	Ординаты линии влияния, Mi
Пролет 0-1	0	0	0	0	0
	0.25	0	-0.1368	-0.1368	-0.05465
	0.50	0	-0.2160	-0.2160	-0.08775
	0.75	0	-0.1872	-0.1872	-0.07678
	1.0	0	0	0	0
Пролет 1-2	0	0	0	0	0
	0.25	-0.3120	1.3680	1.0560	0.27386
	0.50	-0.3600	2.1600	1.8000	0.53643
	0.75	-0.2280	1.8720	1.6440	0.52927
	1.0	0	0	0	0
Пролет 2-3	0	0	0	0	0
	0.25	1.1980	-0.4378	0.7602	0.26050
	0.50	1.3824	-0.6912	0.6912	0.24938
	0.75	0.8755	-0.5990	0.2765	0.09357
	1.0	0	0	0	0

По полученным данным строим линии влияния опорных изгибающих моментов и M_2, а также линию влияния изгибающего момента $M_{/2/2}$ (см. рис. 2.27).

Для дальнейших расчетов подсчитаем методом трапеций площади линий влияния Mi, M_2 и $M/_2 l_2$ для каждого из пролетов.

Линия влияния M_x

$$со*! = \frac{0.14969 \cdot 0.72}{2} = 0.05389 \text{ м}^2;$$

$$Юц = \frac{3.6}{3}(0.17533 + 0.28050 + 0.24542) = -0.63112 \text{ м}^2;$$

$$ю_2 1 = -\frac{6.0}{3} \cdot (0.52926 + 0.53543 + 0.27386) = -2.00784 \text{ м}^2;$$

$$ю_{31} = \frac{4.8}{3} \cdot (0{,}28050 + 0{,}24938 + 0{,}09357) = 0.23400 \text{ м}^2.$$

Линия влияния M_2

$$ю*2 = \frac{0.04678 \cdot 0.72}{2} = -0.01684 \text{ м}^2;$$

Ю12 = • (0.05485 + 0.08775 + 0.07678) = 0.19744 м²;

®22 = - ^ j p (0.27386 + 0.53543 + 0.52926) = -2.00784 м²;

$ю_{33}$ = --$\frac{48}{}$--(0,28050 + 0,24938 + 0,09357) = -0.74814 м².

Линия влияния $мт_3L2$

$$ю*(/,/2) = \frac{0.05146 \quad 0.72}{2} = ftniB_{,,} \quad ^2,$$

$^{<0}1(/_2/2)$ = - ^ • (0.06024 + 0.09638 + 0.08432) = -0.21684 м²;

$ю2(/_2/2)$ = I f " (0-34844 + 0.96457 + 0.34844) = 2.49218 м²;

$ю_{3(/_2/2)}$ = - $\frac{4\ 8}{}$"J"" (0-09638 + 0.08569 + 0.03215) = -0.25706 м².

3. По линиям влияния, полученным в п. 2, проверка ординат эпюры М, полученным в п. 1

Как известно, определение усилий с помощью линий влияния производится по формулам:

- от действия сосредоточенной силы: 5 = Р/У;,

где yi — ордината линии влияния усилия 5, расположенная под силой Pj;

- от действия равномерно распределенной нагрузки: 5 = qj <чиу, где ωу — площадь участка линии влияния в пределах действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью qj.

Далее последовательно проверим по линиям влияния М\, Mi и $М_2$j2 ординаты эпюры изгибающих моментов, построенной вп.1, в сечениях 1,2 и 0,5/2-

^{м}\ = Р *У и* + • (®*1 + ® 11) + *h* *1₂)*i + ft ®3l = ^{5}" 0-14969 +

+12.5 • (0.05389 - 0.63112)+ 16- (-0.53643) + 7.5 • 0.23400 = -13.279 кНм,

погрешность при этом составляет $\frac{13.696-13.279}{[3595}$ $^{n\cdot n}$ 100% = 3.0%.

Далее определяем

$м_2$ = РУ)(2 + Я\ ' + © И) + ^{р}2 *У(о,*J/J)2 + FT $Ю_{32}$ = 5 • (-0.4678) +

+12.5(-0.01684 + 0.19744) +16(-0.53543) + 7.5(-0.74814) = -12.154 кН м,

погрешность составляет $\frac{12.370 - 13.154}{12.370} \cdot 100\% = 1.7\%$.

Наконец находим

$$/_2 = {}^{P}Y_к(0{,}51_2) + 1\backslash\ \text{®A}(0{,}5/_2) + \text{®1}(0{,}5/_2)] + {}^{P}2\ \text{J}(0{,}5/_2)2 + \text{ft}\ \text{®3}(0{,}5/_2)$$

= 5 • 0.05146 +125(0.01852 - 0.21684) +160.9645 + 7.5 (-0.25706) = 11.283 кН-м,

погрешность составляет $\frac{11.283 - 10.967}{10.967} \cdot 100\% = 2.8\%$.

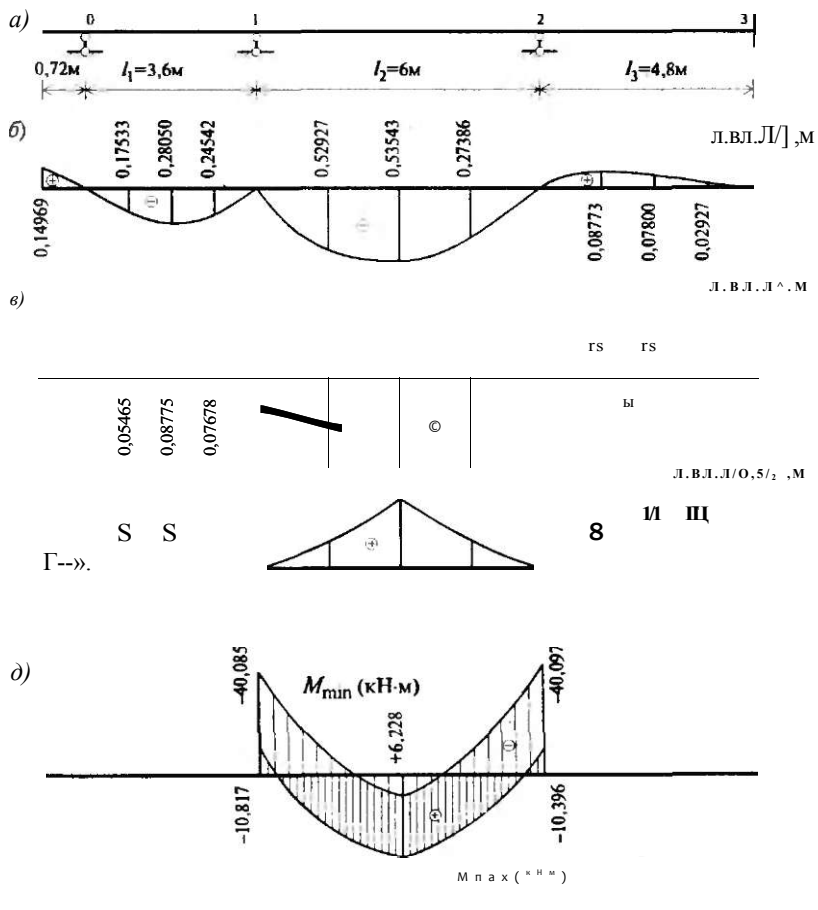


Рис. 2.27

4. *Построение объемлющей эпюры изгибающих моментов*

Построим объемлющую эпюру изгибающих моментов для второго пролета балки по трем точкам 1, 2 и 0,5 /2. Объемлющую эпюру строим при одновременном действии постоянной и временной нагрузок. Так как временная равномерно распределенная нагрузка может располагаться в одном или нескольких пролетах балки (иногда не лежащих рядом), то подсчитаем изгибающие моменты M\, Mi и $M)_2/2$ от загружения временной нагрузкой последовательно каждого из пролетов балки. Затем, суммируя отдельно все положительные и все отрицательные значения моментов в сечениях 1, 2 и 0,5/2 ^{01} временной нагрузки и складывая с моментами от постоянной нагрузки в соответствующих сечениях (рис. 2.27, б), найдем максимальные и минимальные значения изгибающих моментов в сечениях 1, 2 и 0,5 $/_2$.

Все подсчеты проводим в табличной форме (табл. 2.9). По полученным данным строим объемлющую эпюру изгибающих моментов для второго пролета балки (рис. 2.27, *д).*

Таблица 2.9

Сечение	Момент от постоянных нагрузок	Временная нагрузка				M_{max}	M
		на консоли	в пролете 0-1	в пролете 1-2	в пролете 2-3		
1	-13.696	0.539	-6.311	-20.078	2.340	-10.817	-40.085
0,5 h	-10.967	0.185	-2.168	24.922	-2.571	36.074	6.228
2	-12.370	-0.168	1.974	-20.078	-7.481	-10.396	-40.097

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение статически неопределимых систем.
2. Что означают внешние и внутренние статически неопределимые системы?
3. Перечислите классические методы расчетов статически неопределимых стержневых систем.
4. Сформулируйте понятие работы внешних сил на возможных перемещениях.
5. Перечислите методы расчета перемещений стержневых систем и дайте соответствующее пояснение, раскрывающее их суть.
6. Дайте определение основной и эквивалентной системы по методу сил.
7. Раскройте суть канонических уравнений метода сил.

8. Поясните суть коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях метода сил.
9. Поясните суть свободных членов в канонических уравнениях метода сил.
10. Сформулируйте формулу Мора.
11. Поясните суть способа Верещагина.
12. В чем суть статической проверки заданной системы в целом?
13. Поясните суть деформационной проверки заданной системы с применением окончательной эпюры моментов.
14. Дайте определение теоремы о взаимности перемещений.
15. Дайте определение степени кинематической неопределимости заданной системы.
16. Раскройте суть основной и эквивалентной системы по методу перемещений.
17. Поясните физический смысл коэффициентов канонических уравнений метода перемещений при неизвестных.
18. Поясните физический смысл свободных членов в канонических уравнениях метода перемещений.
19. Сформулируйте свойство симметрии коэффициентов канонических уравнений при неизвестных.
20. Раскройте физический смысл канонических уравнений метода перемещений.
21. Поясните порядок проверки о правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений метода перемещений.
22. Поясните порядок проверки правильности вычисления грузовых членов в канонических уравнениях метода перемещений.
23. Поясните порядок проверки правильности определения окончательной эпюры изгибающих моментов.
24. Дайте определение неразрезной балки.
25. Сформулируйте уравнения трех моментов.
26. Поясните порядок построения линий влияния опорных моментов для неразрезной балки кинематическим методом.

ГЛАВА 3

БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

3.1. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки, лежащей на сплошном упругом основании

В инженерной практике часто встречаются балочные элементы конструкций, лежащие на сплошном *упругом основании.* К таким конструкциям могут быть отнесены шпалы железнодорожного пути, ленточные фундаменты зданий, фундаменты плотин, опирающиеся на грунты и др. Кроме того, к таким конструкциям относятся также и рельсы, у которых число опор бесконечно велико, а расстояние между ними мало по сравнению с длиной.

В машиностроении и различных других областях техники для многих конструкций в эксплуатационном режиме, находящихся в условиях сплошного контакта с другими изделиями, можно применить расчетную схему балки на упругом основании.

Расчет балки на упругом основании в строгой постановке сводится к решению контактной задачи между конструкцией и основанием. Сложность решения контактных задач в строгой постановке общеизвестна. Поэтому для решения инженерных задач, связанных с расчетом балки, применяются приближенные подходы, суть которых заключается в следующем.

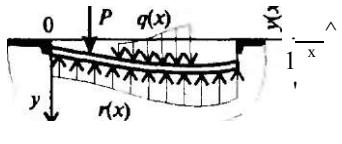


Рис. 3.1

Предварительно устанавливается зависимость между реактивным отпором и осадкой поверхности основания. Одной из наиболее распространенных гипотез является гипотеза о пропорциональной зависимости между реакцией и осадкой - *гипотеза Винклеровского основания.*

На рис. 3.1. показана деформация балки от внешней нагрузки, распределенной по произвольному закону. Реакция со стороны основания в произвольной точке, при соблюдении условий проскальзывания на контактной поверхности между подошвой балки и основанием, принимается пропорциональной прогибу

$$iix) = -ky\{x), \qquad (3.1)$$

где *r(x)* - реакция основания, приходящаяся на единицу длины балки, (Н/м); Х-*) — просадка основания; *к = k\b\ b* — ширина подошвы балки; *к* — коэффициент, характеризующий жесткость основания и называемый *коэффициентом податливости основания* или *коэффициентом постели,* [Па/м].

Этот коэффициент представляет собой отпор основания, приходящийся на 1 м^2 площади при просадке, равной единице. Знак минус в выражении (3.1) означает, что реакция противоположна направлению просадки.

Значения коэффициента постели к\ для некоторых грунтовых и скальных оснований приведены в табл. 3.1.

Таким образом, со стороны основания на балку действует сплошная распределенная нагрузка интенсивностью г[х). Суммарная интенсивность распределенной нагрузки, приложенной к балке, при произвольном значении х определяется

$$p(x) = Hx) + g(x) = -ку(x) + q(x), \qquad (3.2)$$

где *q(x)* — приложенная к балке, заданная распределенная нагрузка (например, вес погонной длины балки).

Дифференциальное уравнение изгиба упругой балки в данном случае принимает вид

$$EJ_z y^{jV}(x) = p(x), \qquad (3.3)$$

или после подстановки (3.2) в (3.3) получим

$$EJ_z y^{lv}(x) + ку(x) = q(x). \qquad (3.4)$$

Физический смысл модели, приводящий к уравнению (3.4), может быть различен. Так, если основание принимать в виде упругого полупространства, взамен модели Винклеровского основания, из приближенных решений контактных задач, то коэффициент *к* имеет вид

$$к \cdot \quad y,$$
$$1 - И^2$$

где E_0 — модуль деформации грунта основания; */л* — коэффициент Пуассона.

В случае балки постоянного сечения интегрирование уравнения (3.4) не представляет особых затруднений. Вводится обозначение

$$к \quad 4P^4; \qquad (3 = 4$$

где р — называется коэффициентом относительной жесткости основания, [1/м].

Таблица 3.1

Значения коэффициента постели к\ для различных грунтов

№ п/п	Материал основания	$к_и$ МПа/м
1.	Песок свеженасыпанный Глина мокрая, размягченная	1-5
2.	Грунты средней плотности: песок слежавшийся; гравий насыпной; глина влажная	5-50
3.	Грунты плотные: песок и гравий, плотно слежавшийся; щебень; глина малой влажности	50-100
4.	Грунты весьма плотные: грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный; глина твердая	100-200
5.	Известняк, песчаник, мерзлота	200-1000
6.	Твердая скала	1000-15000

Тогда дифференциальное уравнение (3.4) принимает вид

$$y^{IV} « + 4\ p^4 y(x) = q(x)/EJ_z. \qquad (3.5)$$

Решение уравнения (3.5) можно получить общими методами решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и оно имеет следующую структуру:

$$У(x) = Q_л(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + C_4 y_4(x) + y(x), \qquad (3.6)$$

где *Cj* — произвольные постоянные, *j* = 1, 2, 3, 4; *yj(x)* — частное линейно-независимое решение соответствующего (3.5) однородного уравнения

$$y^{,v}(x) + 4\ P^4 y(x) = 0, \qquad (3.7)$$

y(x)* — частное решение неоднородного уравнения (3.5), зависящее от характера внешней нагрузки *q(x).*

Частное решение однородного уравнения (3.7) представляется **в** виде *y(x)* =Cexp(A-**X),** подставляя которое в (3.7), получим характеристическое уравнение

$$X^4 + 4\ (З^4 = 0. \qquad (3.8)$$

Используя *формулы Муавра* для корней из комплексных чисел найдем четыре корня уравнения (3.8):

?ч = p(1 + /); = p(1 - />; x_3 = -(3(1-0; >w, = -p(1 + 0,

где / — мнимая единица (/ = -У-F).

Следовательно, решение вида (3.6) будет таким:

$$y(x) = \exp(-px)\{C!\cos(Px) + C_2\sin(px)\} + \exp(Px)\{C_3\cos(px) + C_4\sin(px)\} + /(x). \quad (3.9)$$

Произвольные постоянные *C\, C2,* C_3 и C_4 находятся из граничных условий для конкретной задачи, как и при расчете обычной балки.

3.2. Анализ общего решения дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании

Как нетрудно видеть из (3.9), общее решение включает выражения для затухающей и возрастающей гармоник или, иными словами, для двух затухающих гармоник, одна из которых затухает по направлению к правому концу балки, а другая - к левому. Затухание здесь довольно быстрое. Чтобы установить его степень, увеличим х на я/р. Тогда получим

$$y(x + я/p) = \exp(-px - л)\{C,\cos(px + n) + C_2\sin(px + л)\} +$$
$$+ \exp(px + л)\{C_3\cos(px + л) + C_4\sin(px + л)\} + /(x + я/p) =$$
$$= -\exp(-px)\exp(-я)\{Q\cos(px) + C_2\sin(px)\} -$$
$$- \exp(px)\exp(л)\{C_3\cos(px) + C_4\sin(px)\} + y\backslash x + я/p). \quad (3.10)$$

Анализируя полученный результат, приходим к выводу, что первое слагаемое получило множитель -exp(-я) =-1/23.14, а второе слагаемое -exp(я) =-23.14. Таким образом, при переходе к следующей полуволне значение первого слагаемого (3.10) уменьшается в 23.14 раза, а второго слагаемого увеличивается во столько же раз.

В случае длинной балки члены уравнения, содержащие множитель exp(px), для правого ее конца становятся очень большими. Так как в действительности там деформации и внутренние силы имеют конечную величину, то коэффициенты C_3 и C_4 при членах, содержащих множитель exp(Px), должны быть очень малыми и для достаточно длинной балки практически обращаться в нуль. В этом случае общее решение упрощается и получает вид

$$y(x) = \exp(-px)\{C_x\cos(px) + C_2\sin(px)\}. \quad (3.11)$$

На расстоянии трех полуволн 3 5 = 3 л/р от левого конца балки члены общего решения с постоянными интегрирования C_{ℓ} и C_2 практически исчезнут. Поэтому балку длиной $L > 3$ л/р можно считать бесконечно длинной. Точнее ее можно рассчитывать, как бесконечно длинную, поскольку уже в середине ее влияние концевых граничных условий будет сказываться очень мало. Практически принимают, что если $L >$ л/р, то балка принимается бесконечно длинной (бесконечно длинная балка).

$g(x)=a_1x+a_0$

-т-гттТТТ

"уууууууууууу

ттяшяшяшшшшшштшттшшя—^

Рис 3 2

К общему решению (3.9) надо добавить частное решение $y^*(x)$, зависящее от нагрузки $q(x)$. Если нагрузка $q(x)$ представляет собой алгебраический полином от x, то частное решение можно найти в виде полинома той же степени методом неопределенных коэффициентов. В частности, для линейной функции вида $q(x) = щx + щ$ (рис. 3.2), частное решение уравнения (3.5) имеет вид

$$/ (x) = (a, x + a_0)/к\ Ъ. \qquad (3.12)$$

При отсутствии приложенной к балке нагрузки, т.е. при $q = O$, момент и поперечная сила на них равны нулю; этому вполне удовлетворяет частное решение (3.12) и добавлять к нему обшее решение не требуется. Следовательно, (3.12) будет полным решением, и балка не будет изгибаться. Очевидно, что внутренние силы в ней везде равны нулю.

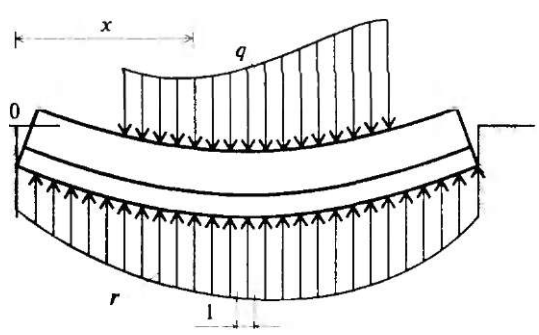


Рис. 3.3

Если балка имеет на концах какие-либо закрепления, например опоры (рис. 3.3), то в ней появляются изгибающие моменты и кривизна оси, которые можно определить общим методом нахождения произвольных постоянных общего решения по граничным условиям.

3.3. Расчет бесконечно длинной балки, нагруженной сосредоточенной силой

Рассмотрим балку бесконечной длины, простирающуюся в области -да < *x* < то, нагруженную в сечении с абсциссой *x* сосредоточенной силой P (рис. 3.4). Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки записывается аналогично (3.4):

$$EJ_Z\ /^{v}(Jt) + 4\ ку(x) = 8\ (x)\ P, \qquad (3.13)$$

где 6 (x) — единичная функция Дирака.

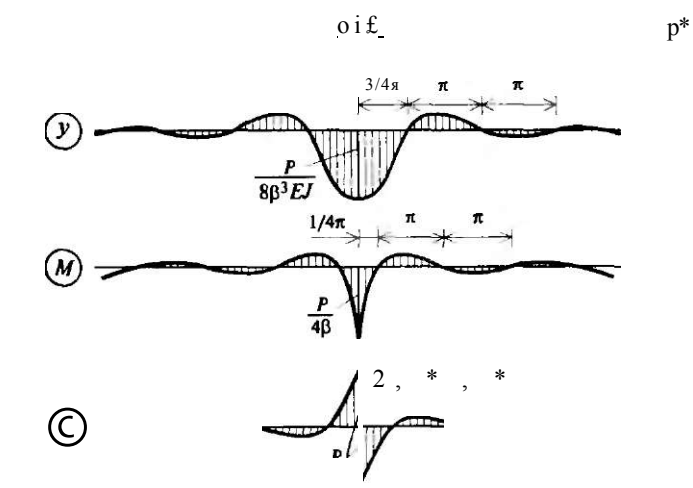


Рис. 3.4

Общее решение (3.13) записывается аналогично (3.9). Произвольные постоянные $C_ь$ C_2, *C-$* и Q *определяются* из *граничных* условий задачи:

при $x \to \pm$ оо, y (д) -» 0; (3.14)

при $x = 0$, $dy/dx = 0$; $Q_y(0) = -P/2$. (3.15)

С учетом (3.14) следует, что

$$C_3 = C_4 = 0. \qquad (3.16)$$

Из первого из условий (3.15) получим

$$-P\ (C,\ -\ C_2) = O \qquad (3.17)$$

или

$$C,\ -\ C_2 = C. \qquad (3.18)$$

Следовательно, решение (3.13) запишется в виде

$$y(x) = C\exp(-P|x|)\{\cos(Px) + \sin(Px)\}. \qquad (3.19)$$

Из (3.20) легко установить, что

$$Q_y(x) = -EJ_z d^3y/dx^3 = EJ_Z\ 4p^3\ C\exp(-P|x|)\cos(Px). \qquad (3.20)$$

С учетом второго условия (3.15) можно записать, что

$$Qy(0) = -P/2 = -EJ_Z\ 4\ P^3\ C, \qquad (3\text{-}21)$$

откуда окончательно получим

$$c = \frac{}{8p^{\ 3}EJ_Z} \qquad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.19), получим окончательную формулу по определению прогибов балки на упругом основании при действии сосредоточенной силы P в следующем виде

$$y(x) = \frac{}{8P}\ f\ \frac{}{EJ_Z}\ \exp(-P|x|)\{\cos(Px) + \sin(Px)\}. \qquad (3.23)$$

Последовательно определяем выражение изгибающего момента и поперечной силы:

$$M_2(x) = -EJ_Z \quad = \wedge\ \exp(-PI\ x|)\{\cos(px) - \sin(p\ x)\}, \qquad (3.24)$$

$$Qz(x) = \wedge\wedge = -sign(x)|-exp(-p|x|)cos(px). \qquad (3.25)$$

Если в выражениях (3.23)^(3.25) принять P= 1 кН, то эпюры y(0), M_z(0) и $Qy(0)$ можно трактовать, как линии влияния соответственно деформаций, изгибающих моментов и поперечных сил для сечения балки x = 0. Соответствующие эпюры приведены на рис. 3.4.

Обратим внимание на тот факт, что, согласно (3.25), наибольший изгибающий момент $M_{max} = \frac{p}{4p}$, возникающий под силой P при заданной жесткости балки EJ_Z, в большей степени зависит от жесткости основания $к$, т.к. коэффициент относительной жесткости основания P зависит от соотношения $к$ и EJ_Z. Например, в случае, ес-

ли балка лежит на жестком основании *(к* -> оо => р -» оо), то Л/щах -» 0; и наоборот, в случае, если балка лежит на мягком основании *(к* -» 0 => р -» 0), то $Л/_{тах}$->оо. Простым подтверждением этого явления может служить то, что железнодорожные рельсы, уложенные на жесткое основание, могут безболезненно выдерживать довольно значительные поездные нагрузки. В то же время, те же рельсы, уложенные на слабое основание, либо, если рельс «провисает» (т.е. пространство между шпалами содержит пустоты), могут разрушиться при значительно меньших нагрузках.

3.4. Расчет балки бесконечной длины, нагруженной системой сосредоточенных сил

Рассмотрим решение следующей задачи. Предположим, что на балку бесконечной длины в точках с абсциссами ***XJ(J=*** 1, 2,..., *N)* приложена система сосредоточенных сил *P\, P_2, Рь, -, Pn* (рис. 3.5).

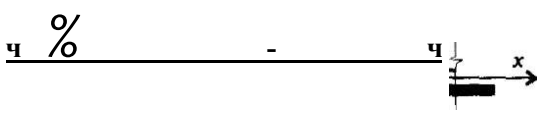


Рис. 3.5

Рассматривая решение поставленной задачи, на примере рельса верхнего строения пути в качестве балки, лежащей на сплошном упругом основании при действии системы сосредоточенных грузов *Pi, P_2, РЗУ — > Pn >* передающихся на путь от подвижного состава.

Железнодорожный путь должен отвечать требованиям прочности, жесткости и устойчивости при воздействии на него подвижного состава.

Напряжения и деформации, возникающие в опасных сечениях конструкции верхнего строения пути должны удовлетворять условиям прочности и жесткости, т.е.

$$<W * \quad ; \tag{3-26}$$

$$Jmax — Lv] > \tag{3-27}$$

где $<J_{max}$, $у_т$ах — соответственно, максимально возможное значение напряжений и прогибов конструкции в опасных сечениях; [а], [у] —предельно допустимые величины напряжений и прогибов.

В данном случае формулы по определению прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях с координатами x_n (tt = I, 2,…, N) на основании теоремы о независимости действия внешних сил в упругих системах и теоремы о взаимности можно записать в виде

» = - x j [{ Щ * - * , |)+яп(-(3|x$_я$-x$_у$-1. (3.28)

Последовательно определяем выражение изгибающего момента и поперечной силы:

$$Qy(x_n) = Z\ \mathrm{sign}(x_{,,} - x_y)\ \hat{}\ \exp(-p|X_n - Xj|)\cos(p|x_{,,} - x_y - 1. \quad (3.30)$$

По максимальному значению момента, вычисляемому по (3.29)

$$M_{max}=M_z(x_{,,}), \quad (3.31)$$

в опасном поперечном сечении рельса в опасных точках вычисляется максимальное значение нормальных напряжений:

$$= \quad (3\text{-}32)$$
$$^{w}z$$

где W_z — момент сопротивления поперечного сечения рельса пу-

Прочность рельса пути считается обеспеченной, если выполняется условие

$$-"max < R, \quad (3.33)$$

где R — расчетное сопротивление материала конструкции инвентарного верхнего строения пути.

Основные геометрические характеристики стандартных рельсов приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Основные геометрические характеристики стандартных рельсов

Геометрические характеристики		Тип рельсов				
		Р38	Р43	Р50	Р65	Р75
		ГОСТ				
		3542-47	7173-54	7174-75	8161-75	16210-77
Моменты инерции, Ю-^{8} м4	*J.* *Jy*	1222.5 209.3	1489.0 260.0	2011.0 375.0	3548.0 569.0	4490.0 661.0
Масса пог. м, кг	*Q*	38.4	44.7	51.7	64.7	74.4
Моменты сопротивления отн. осей, Ю-^{6} м^{3}	*Ц Тниз* *ЦГгол* *ц/под*	182.0 180.3 36.7	208.3 217.3 45.6	248.0 286.0 57.1	358.0 435.0 76.3	509.0 432.0 88.0
Основные размеры сечения рельса, мм	*н* *Ьпод* *hгол* *Ьгол* 5	135.0 114.0 40.0 68.0 13.0	140.0 114.0 42.0 70.0 14.5	152.0 132.0 42.0 71.9 16.0	180.0 150.0 45.0 75.0 18.0	192.0 160.0 48.5 75.0 20.0
Площадь сечения, Ю-^{4} м^{2}	*F*	49.1	57.0	65.9	82.6	95.1

3.5. Расчет элементов верхнего строения железнодорожного пути как балки бесконечной длины на упругом основании (задача № 10)

Пусть требуется определить прогибы и внутренние усилия в элементах железнодорожного пути. Характеристика пути: рельсы типа Р43; шпалы сосновые: длина шпалы 2.7 м, ширина 0.25 м; балласт песчаный с коэффициентом постели *к*\ = 50 МПа (см. табл. 3.1), площадь подкладки со = 4.64-10"^{2} м^{2} ; локомотив — тепловоз серии ТЭЗ с нагрузками от колес на рельс (105 + 105 + + 105 + 105 + 105 + 105) кН с расстояниями между колесами (2.1 + 2.1 + 4.4 + 2.1 + 2.1) м (рис. 3.6).

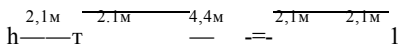


Рис. 3.6

Решение

1. Определение прогибов и внутренних усилий

Последовательно вычисляем или находим по таблицам все необходимые геометрические и жесткостные расчетные характеристики для заданной системы:

J_z = 1.489-10"^{5} м^4; W_z = 2.083-10"^{4} м^3; (см. табл. 3.2)

EJ_Z = 2.Ы0"-1.489-1(Г^5 = 3.127-10^6 Нм^2;

$к = к\ Б$ = 50-10^6-0.14 = 7.010^6 Па.

Площадь полушпалы Q = *ЫЬ/2* = 2.7х0.25/2 = 0.3375 м^2.

$$\frac{' \ *}{4\ EJ_Z} \sqrt{\frac{l \quad 7.0\text{-}10^6}{[4\text{-}\ 3.1127\text{-}10^6}} = 0.865.$$

Определим L = я/р = л/О.865 = 3.63 м. Таким образом, в расчете будем учитывать нагрузки лишь от трех колес локомотива.

Разбиваем балку на участки в точках 1, 2,..., 11. На балку действует система сосредоточенных грузов $P\backslash = P_2$ — P$— 105 кН, приложенных в сечениях 4, 6 и 8 системы (рис. 3.7, *а).*

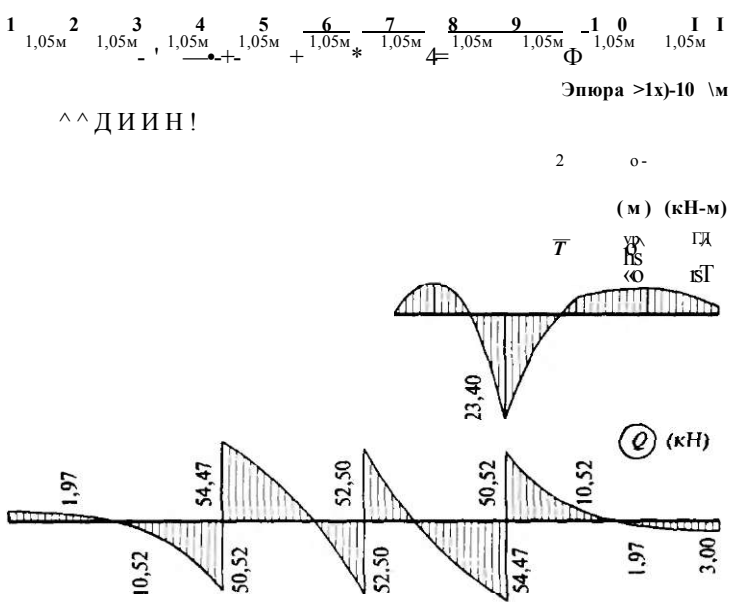


Рис. 3.7

Расчеты будем вести в табличной форме (см. табл. 3.4 — 3.6), по формулам (3.28) — (3.30), для чего в каждом сечении определяется параметр P*. По этому параметру в табл. 3.3 находятся соответствующие значения специальных функций от действия отдельно каждой из нагрузок. Остальное ясно из таблиц 3.4 — 3 6

Таблица 3.3

|1x	П(P*) = = e"^{px}[cos(px) + sin(pjc)]	V(P*)= = e~^{p}*[cos(px) - Sin(px)]	x(P*) = = cos(px)
0.0	1.0000	1 0000	1 0000
0.1	0.9907	0.8100	0.9003
0.2	0.9651	0.6398	0.8024
0.3	0.9267	0.4888	0.7077
0.4	0 8784	0 3564	06174
0.5	0.8231	0 2415	0 5323
0.6	0.7628	0.1431	04530
0.7	0.6997	0.0599	0.3708
я/4	0.6448	0.0000	0.3224
0.8	0.6354	-0.0093	0.3131
0.9	0.5712	-0 0657	0 2527
1.0	0.5083	0 1108	0 1988
1.1	0.4476	-0.1457	0.1510
1.2	0.3899	0.1716	0.1091
1.3	0.3355	-0.1897	0.0729
1.4	0.2849	-0 2011	0 0419
1.5	0.2384	-0 2068	0 0158
ж/2	0.2079	-0.2079	0 0000
1.6	0.1959	-0.2077	-0.0059
1.7	0.1576	-0.2047	-0.0235
1.8	0.1234	-0.1985	-0.0376
1.9	0.0932	-0 1899	-0 0484
2.0	0.0667	-0 1794	-0 0563
2.1	00439	-0.1675	-0.0618
2.2	0.0244	-0.1548	-0.0652
2.3	0.0080	-0.1416	-0.0668
3п/4	0.0000	-0 1340	0.0670
2.4	-0.0056	-0 1282	-0 0669
2.5	-0.0166	-0.1149	-0.0658

Продолжение табл. 3.3

Цх	tl(P*) = $= e^{-px}[\cos(px) + \sin(px)]$	$= e^{4Jx}[\cos(px)-\sin(px)]$	x(P*) = $= \cos x)$
2.6	-0.0254	-0.1019	-0.0636
2.7	-0.0320	-0.0895	-0.0608
2.8	-0.0369	-0.0777	-0.0573
2.9	0.0403	-0.0666	-0.0534
3.0	-0.04226	-0.05632	-0.04929
3.1	-0.04314	-0.04688	-0.04501
it	-0.04321	-0.04321	-0.04321
Зл/2	-0.00898	0.00898	0.0000
2л	0.00187	0.00187	0.00187

По этим результатам построены эпюры прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил (см. рис. 3.7, *б, г).*

2. *Определение напряжений в элементах верхнего строения пути*

Напряжения от изгиба в подошве рельса

$$-_{max} — \frac{-\text{^шах}}{W_2} \quad \frac{23.404 \cdot 10}{208.3 \cdot 10^{-6}} = 112.36 < [а] = 200 \text{ МПа}.$$

Значения напряжений на шпале под подкладкой и на балласте под шпалой будут соответственно равны

$$\frac{Qmax}{Ю} \frac{54.474 \quad 10^{J}}{464\text{-}10^{"4}} = 1.174 \text{ МПа};$$

$$a_{б_6} = \frac{9пш\text{-}}{П} \quad \frac{54.474 \quad 10^{3}}{0.3375} = 0.16 \text{ МПа}.$$

3.6. Расчет коротких балок на упругом основании. Функции Крылова

Значительно более сложным оказывается решение для *коротких балок,* когда требуется учесть условия на обоих концах балки. К таким балкам относится, например, рельсовый путь на шпалах (рис. 3.8). Для коротких балок нельзя использовать решения, полученные для балок бесконечной длины и требуется исходить из общего интеграла (3.9), содержащего четыре произвольные постоянные интегрирования. Для решения обычно пользуются нормаль

Таблица 3.4

№№ сечений	Расстояние *x* до сечения от нагрузки, м (в скобках значение аргумента *fix)*			Значения функции т^ в соответст-вующих точках от действия нагрузки			/	*i*
	Pi	*P2*	*Рз*	*Pi*	*P2*	*Рз*		$10^{"3}$ м
1	-ЗД5 (2,7)	-5,25 (4,5)	-7,35 (6,3)	-0,0334	-0,0123	0,0019	-0,0438	-0,2845
2	-2,10 (1,8)	-4,20 (3,6)	-6,30 (5,4)	0,1181	-0,0357	-0,0003	0,0821	0,5323
3	-1,05 (0,9)	-3,15(2,7)	-5,25 (4,5)	0,5659	-0,0334	-0,0123	0,5202	3,3738
4	0,00 (0,0)	-2,10 (1,8)	-4,20 (3,6)	1,0000	0,1181	-0,0357	1,0823	7,0194
5	1,05 (0,9)	-1,05 (0,9)	-3,15 (2,7)	0,5659	0,5659	-0,0334	1,0985	7,1240
6	2,10(1,8)	0,00 (0,0)	-2,10(1,8)	0,1181	1,0000	0,1181	1,2363	8,0177
7	3,15 (2,7)	1,05 (0,9)	-1,05 (0,9)	-0,0334	0,5659	0,5659	1,0985	7,1240
8	4,20 (3,6)	2,10(1,8)	0,00 (0,0)	-0,0357	0,1181	1,0000	1,0824	7,0194
9	5,25 (4,5)	3,15 (2,7)	1,05 (0,9)	-0,0123	-0,0334	0,5659	0,5202	3,3737
10	6,30 (5,4)	4,20 (3,6)	2,10(1,8)	-0,0003	-0,0357	0,1181	0,0821	0,5323
И	7,35 (6,0)	5,25 (4,5)	3,15 (2,7)	0,0019	-0,0123	-0,0334	-0,0438	-0,2845

Таблица 3.4

№№ сечений	Расстояние х до сечения от нагрузки, м (в скобках значение аргумента *fix)*			Значения функции ц/, в соответствующих точках от действия нагрузки			$\frac{2}{i}>$,	$4p\ i$
	P,	P_2	*Рз*	*P,*	P_2	*Рз*		кНм
1	-3,15 (2,7)	-5,25 (4,5)	-7,35 (6,3)	-0,0865	0,0087	0,0016	-0,0762	-2,312
2	-2,10 (1,8)	-4,20 (3,6)	-6,30 (5,4)	-0,1972	-0,0108	0,0061	-0,2020	-6,130
3	-1,05 (0,9)	-3,15 (2,7)	-5,25 (4,5)	-0,0699	-0,0865	0,0087	-0,1477	-4,481
4	0,00 (0,0)	-2,10 (1,8)	-4,20 (3,6)	1,0000	-0,1972	-0,0108	0,7919	24,031
5	1,05 (0,9)	-1,05 (0,9)	-3,15 (2,7)	-0,0699	-0,0699	-0,0865	-0,2263	-6,866
6	2,10(1,8)	0,00 (0,0)	-2,10(1,8)	-0,1972	1,0000	-0,1972	0,6054	18,374
7	3,15(2,7)	1,05 (0,9)	-1,05 (0,9)	-0,0865	-0,0699	-0,0699	-0,2262	-6,866
8	4,20 (3,6)	2,10(1,8)	0,00 (0,0)	-0,0108	-0,1972	1,0000	0,7919	24,031
9	5,25 (4,5)	3,15 (2,7)	1,05 (0,9)	-0,0087	-0,0865	-0,0699	-0,1477	-4,481
10	6,30 (5,4)	4,20 (3,6)	2,10(1,8)	0,0061	-0,0108	-0,1972	-0,2020	-6,130
11	7,35 (6,0)	5,25 (4,5)	3,15 (2,7)	0,0016	-0,0087	-0,0865	-0,0762	-2,312

Таблица 3.4

№№ сечений	Расстояние x до сечения от нагрузки, м (в скобках значение аргумента Px)			Значения функции Vi в соответствующих точках от действия нагрузки			*IIx,*	1 2
	P,	*P2*	*Pз*	*P,*	*Pi*	*Pз*		кН
1	-3,15 (2,7)	-5,25 (4,5)	-7,35 (6,3)	0,0599	0,0018	-0,0017	0,0600	3,151
2	-2,10(1,8)	-4,20 (3,6)	-6,30 (5,4)	0,0395	0,0233	-0,0029	0,0599	3,148
3	-1,05 (0,9)	-3,15 (2,7)	-5,25 (4,5)	-0,2480	0,0599	0,0018	-0,1863	-9,779
4	0,00 (0,0)	-2,10 (1,8)	-4,20 (3,6)	-1,0000	0,0395	0,0233	-0,9371	-49,199
4'	0,00 (0,0)	-2,10(1,8)	-4,20 (3,6)	1,0000	0,0395	0,0233	1,0628	55,797
5	1,05 (0,9)	-1,05 (0,9)	-3,15 (2,7)	0,2480	-0,2480	0,0599	0,0599	3,1448
6	2,10(1,8)	0,00 (0,0)	-2,10(1,8)	-0,0395	-1,0000	0,0395	-1,0000	-52,500
6'	2,10(1,8)	0,00 (0,0)	-2,10(1,8)	-0,0395	1,0000	0,0395	1,0000	52,500
7	3,15 (2,7)	1,05 (0,9)	-1,05 (0,9)	-0,0599	0,2480	-0,2480	-0,0599	-3,1448

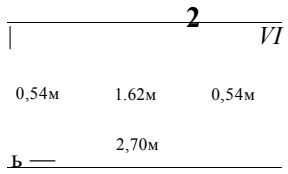


Рис. 3.8

ными фундаментальными функциями уравнения (3.5). Эти функции называемые *функциями Крылова,* являются решениями однородного уравнения (3.5) и удовлетворяют специальным условиям при x = 0.

Составим следующую таблицу, в которой сведены начальные значения функций Крылова и их производных:

	$U_k'(0)$	$U_k(0)$	$ul_{\ell}(0)$	$u''_k(0)$
$U\backslash$		o		
U_2		0		
Щ		1		
v_4		o		

(3.34)

Так как во всех клетках этой таблицы стоят нули, лишь на главной диагонали единицы, то система частных решений U_k называется системой с единичной матрицей. Нетрудно установить, что условиям (3.34) удовлетворяют следующие функции:

$$t/^{px) = chpxcospx;}$$

$$U_2(P^*) = ^ \cdot [ch\ p^* \cdot \sin p^* + sh\ px \cdot \cos px];$$

$$f/_3(px) = ^2 - shpxsinpx; \qquad (135)$$

$$t/_4(px) = ^ \cdot [ch\ px \cdot \sin px - sh\ px \cdot \cos px].$$

Следует отметить, что производные функций Крылова (3.35) выражаются снова через те же функции, причем

$$\begin{aligned} U_2' &= U_V, \\ Щ' &= u_2, \\ U_4' &= U_3. \end{aligned} \qquad (3.36)$$

Таким образом, общий интеграл уравнения (3.9) может быть представлен через функции Крылова

$$y(x) = C,t/,(px) + C_2u_2фx) + C_3б'з(px) + C_4Щpx) + /(x). \quad (3.37)$$

Постоянные интегрирования $C\backslash$, C_2, С3, С4 имеют здесь совершенно определенный смысл. Действительно, если положить x = 0, и воспользоваться свойством (3.34) введенных функций, получим

$$>'(o) = c, = >'o;$$

$$>\cdot(°) = {}^{c}2 = ФО;$$

$$/(o) = c_3 = -\frac{M}{EJ_z} \quad (3.38)$$

$$EJ_z$$

Таким образом,

$$>>(x) = M0)f/,(px) + У(0)\ t/_2(px) + /(0)t/_3(px) +$$

$$+ У(0)£4(px) + У(x). \quad (3.39)$$

Формула (3.39) представляет общий интеграл уравнения (3.5). Постоянные интегрирования имеют здесь простой смысл: это начальные (при x = 0) значения искомой функции и ее производные.

Поэтому метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на формуле (3.39) и широко применяемый в строительной механике, называется *методом начальных параметров.*

Согласно метода начальных параметров, балка разбивается на участки. Подставив (3.38) в (3.39), получим функцию прогибов на I участке балки

$$У, = У_0{}^{и}\backslash (И + Фо\ U2\ И \quad (\quad И \quad -$$

$$- I_{Z}\hat{}\ H + J\ H_{Z}\hat{}\ i\ H - \quad (3_-40)$$

Пользуясь приведенными в (3.36) правилами дифференцирования от функций прогибов (3.40) переходим к углам поворота (pj = = у[и далее по формулам (3.25), (3.26) к внутренним усилиям на I участке

$$Фl = -Уо \bullet 4\ \hat{}\ 4\ И + ФО \quad -$$

$$- - Я\ о - и\ Щ + \hat{}\ и\ \hat{}\ х\ ) . \quad (3.41)$$
$$EJ_Z \quad \hat{}\ ' \quad 4EJ_z$$

$$Mi = y_0 - 4EJ_zU_3(px) + <po \bullet AEJJJ^x) + M_0 \bullet Uifix) +$$

(3.42)

$$Q = Уо \bullet 4£JM_2((ix) + q>o \bullet 4EJ_zU_3fix) - M_0 \bullet 4f/_4(px) +$$

$$+O_0C/_1(px) - ?_0 - C/_2(px). \quad (3.43)$$

Функцию У\ продолжаем на второй и последующие участки. Приращения Ау, этой функции будут зависеть от приращений внутренних сил ДЛ//, ДQ, и интенсивности нагрузки на границах между участками Д<?/. Добавляя эти приращения к функции прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил, получим универсальные формулы

$$Уп = Л(И +$$

$$L \quad z \quad z \quad + \quad z \quad [\bullet - * ,)] \}^{\wedge} \quad <3\text{-}44.$$

$$J$$

$$z \quad z \quad z \quad j$$

$$M_{,,} = M_x(Px) + Ё (\mathbf{A}Mi\ f/i(px_{(}) + AQU_2(p_{Xi}) - A_{Qi}\ t/_3(px,)| \ ; \quad (3.46)$$

$$Q_n = ft(px) + \overset{Ц—1}{Ц} - A\,M\,i \qquad f/_2(px_{(})\} \ , (3.47)$$

здесь для краткости обозначено x, = x - a,; a, — абсцисса 1-й границы между участками.

Как и в обычной балке, в начале координат часть начальных параметров бывает известна, а остальные определяются из граничных условий, формируемых для противоположного конца стержня.

С целью облегчения вычислений при выполнении практических расчетов балок на упругом основании в таблице 3.7 приводятся значения тригонометрических, гиперболических функций и функций Крылова при заданном аргументе.

Таблица 3.7

p Z	sinpz	cospz	shpz	chpz	PZ)	P №)	P ² №)	P №)
0.0	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0998	0.9950	0.1002	1.0050	0.9999	0.1000	0.0050	0.0002
0.2	0.1987	0.9801	0.2013	1.0201	0.9998	0.1999	0.0200	0.0024
0.3	0.2955	0.9553	0.3045	1.0453	0.9986	0.2999	0.0450	0.0045
0.4	0.3894	0.9210	0.4108	1.0811	0.9957	0.3997	0.0800	0.0107
0.5	0.4794	0.8776	0.5211	1.1276	0.9896	0.4989	0.1249	0.0208
0.6	0.5646	0.8253	0.6367	1.1855	0.9784	0.5974	0.1797	0.0360
0.7	0.6442	0.7648	0.7586	1.2552	0.9600	0.6944	0.2443	0.0571
я/4	0.7071	0.7071	0.8687	1.3246	0.9366	0.7754	0.3071	0.0806
0.8	0.7173	0.6967	0.8881	1.3374	0.9318	0.7890	0.3185	0.0851
0.9	0.7833	0.6216	1.0265	1.4331	0.8908	0.8803	0.4020	0.1211
1.0	0.8415	0.5403	1.1752	1.5431	0.8337	0.9667	0.4944	0.1659
1.1	0.8912	0.4536	1.3356	1.6685	0.7568	1.0464	0.5951	0.2203
1.2	0.9320	0.3624	1.5095	1.8107	0.6562	1.1173	0.7034	0.2851
1.3	0.9636	0.2675	1.6984	1.9709	0.5272	1.1767	0.8183	0.3612
1.4	0.9854	0.1700	1.9043	2.1509	0.3656	1.2216	0.9382	0.4489
1.5	0.9975	0.0707	2.1293	2.3524	0.1663	1.2485	1.0620	0.5490
л/2	1.0000	0.0000	2.3013	2.5092	0.0000	1.2546	1.1507	0.6273
1.6	0.9996	-0.0292	2.3756	2.5775	-0.0753	1.2536	1.1873	0.6615
1.7	0.9917	-0.1288	2.6456	2.8283	-0.3643	1.2320	1.3118	0.7864
1.8	0.9738	-0.2272	2.9422	3.1075	-0.7060	1.1788	1.4326	0.9236
1.9	0.9463	-0.3233	3.2682	3.4174	-1.1049	1.0886	1.5463	1.0726
2.0	0.9093	-0.4161	3.6269	3.7622	-1.5655	0.9559	1.6420	1.2320
2.1	0.8632	-0.5048	4.0219	4.1443	-2.0920	0.7736	1.7359	1.4019
2.2	0.8084	-0.5885	4.4571	4.5679	-2.6882	0.5348	1.8016	1.5789
2.3	0.7457	-0.6663	4.9370	5.0372	-3.3563	0.2334	1.8408	1.7614
3П/4	0.7071	-0.7071	5.2280	5.3228	-3.7634	0.0335	1.8484	1.8651
2.4	0.6754	-0.7374	5.4662	5.5569	-4.0976	-0.1388	1.8459	1.9460
2.5	0.5985	-0.8011	6.0502	6.1323	-4.9126	-0.5883	1.8105	2.1292
2.6	0.5155	-0.8569	6.6947	6.7690	-5.8003	-1.1236	1.7256	2.3065
2.7	0.4274	-0.9041	7.4063	7.4735	-6.7568	-1.7509	1.5827	2.4725
2.8	0.3390	-0.9422	8.1919	8.2527	-7.7757	-2.4604	1.3885	2.6290
2.9	0.2392	-0.9710	9.0596	9.1146	-8.8503	-3.3083	1.0835	2.7443
3.0	0.1411	-0.9900	10.0179	10.0677	-9.9670	-4.2486	0.7068	2.8346
3.1	0.0416	-0.9991	11.0765	11.1215	-11.1114	-5.3019	0.2304	2.8822
я	0.0000	-1.0000	11.5487	11.5920	-11.5920	-5.7960	0.0000	2.8872

3.7. Расчет шпалы рельсового пути, как короткой балки на упругом основании (задача № 11)

Пусть требуется определить прогибы и внутренние усилия в железобетонной шпале E= 3.05-Ю^{10} Н/м^2, длиной 2/ = 2.7 м, с размерами поперечного сечения $bx\ h$ = 0.25х0.18 м^2, лежащей на балластном слое щебня $к$\ = 75 МПа (см. табл. 3.1), нагруженной двумя силами Р = 210 кН каждая, приложенными на расстоянии а = 0.54 м от ее концов (рис. 3.8).

Решение

1. Расчет начальных параметров

Последовательно вычисляем все необходимые геометрические и жесткостные расчетные характеристики для заданной системы:

$$J_z = \frac{b h^3}{12} - \frac{0.25 \cdot 0.18^3}{12} = 1.215\text{-Ю}^{\wedge}\text{м}^4;$$

$$W_z = \frac{bh^1}{6} \quad \frac{0.25 \cdot 0.18^2}{6} = 1.35\text{-Ю}^{-3}\ \text{м}^3;$$

$$EJ_z = 3.05 \cdot \text{Ю}^{10} \cdot 1.215 \cdot 10''^4 = 3.71 \cdot 10^6\ \text{Н-м}^2;$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{k_x}\, \boldsymbol{b} = 75 \cdot 10^6 \cdot 0.25 = 18.75 \cdot 10^6\ \text{Па};$$

$$\frac{\boldsymbol{J}\ 18.75\ \ 10^6}{\boldsymbol{Y}^{E\ J}{}_z \quad \text{V4-3.71-}10^6} \quad 1.06.$$

Поместим начало системы координат ху в центре тяжести левого крайнего сечения шпалы. Граничные условия задачи в начальном сечении при х = 0 запишем в виде

$$\mathbf{M_0 = 0;} \quad \mathbf{C2b = 0.} \tag{3.48}$$

Согласно (3.40)+(3.43) запишем функции прогибов, углов поворота и внутренних усилий для I участка ($0 < x < a$):

$$\begin{aligned} &\Phi 1\,(\text{x}) = -4 \gg_0 \quad +\Phi\text{O}^{\text{и}}\backslash\{\&\text{x}); \\ &Mi(x) = 4\ EJ_Z\ [\gg 0\ \text{t}/_3(\text{px}) + \Phi\text{o}\ \text{t}/_4(\text{H}]; \\ &Ql\{^*) = 4\ EJ_z\ [>0\ U_2(\text{px}) + \phi_0\ \text{f}/_3(\text{px})\text{j}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Составим соответствующие выражения для II участка (a < x < *<21- a),* учитывая, что на границе участков I и II, т.е. при ***x*** = *a* имеем скачок функции поперечной силы на величину Дft = - P :

$$ЛI = + - o)); \quad (3.50)$$

$$_{ф\,1\,1} = _{ф\,1}(px)_{+} - ^{\wedge} - \{/з(p(x - _{й}))); \quad (3.51)$$

$$M_n = Л/,(px) - pu_2(\$(x - o)); \quad (3.52)$$

$$Qi\backslash = Q\backslash\{Vx) - PU_l(Hx - a)). \quad (3.53)$$

Для определения и фо используем симметричный характер нагружения балки относительно среднего сечения x = /, где имеем

$$_{Ф}(/) = 0; \qquad <2(/) = 0.$$

Составим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{фп(0 = -JO\ 4u\$t) + ФО\ f\ i\ (\ p\ /\ )\ ^{+}\ P\ (\ '\ -^{й}))\ =^{0};} \qquad <^{3.54}->$$

$$e_{п}(/) = Уо\ 4£У_{г}C/_{2}(p/) + \mathbf{Фо}\ 4E/_{z}f/_{3}(p/) - PC/i(\mathbf{p}(/ - я)) = 0. \quad (3.55)$$

Согласно (3.54) и (3.55), учитывая, что

$$p/ = 1.06\ 1.35 \approx 1.5; \qquad P(/ - o) = 1.06\ (1.35 - 0.54) \approx 0.9$$

с учетом данных таблицы 3.7, получим

$$- Vo \cdot 4 \cdot 1{,}06 \cdot 0.5490 + фо \cdot 0.1663 + \frac{21_{г} \cdot Ю^{4}}{1.06 \cdot 10^{6}} \cdot 0.4020 = 0;$$

$$4 \cdot 1.06^{2} \cdot 10^{6} \cdot (у_{0} \cdot 1.06 \cdot 1.2485 + ф_{0} \cdot 1.0620) - 21 \cdot 10^{4} \cdot 0.8908 = 0.$$

После ряда преобразований приходим к системе:

$$- \quad + 0.07144 \cdot фо = -0.00870;$$

$$J/_{0} + 0.87247 \cdot фо = 0.00848,$$

корни которой принимают значения

$$= 0.00868 = 8.68 \cdot Ю^{-3}\ м; \quad ф_{0} = -0.00025 = -2.5\text{-}10''^{4}\ рад.$$

В качестве условия проверки правильности вычисления значений начальных параметров, подставим их значения в (3.54) и (3.55), получим

$$л.(Л=-8.68\text{-}10''^{3} \cdot 4\text{-}1.06\text{-}0.5490\text{-}2.5\text{-}КГ^{4} \cdot 0.1663+ \frac{}{1.06 \cdot 3.71 \cdot 10} —$$

$$0.4020 = 5.07\ \ 10''^{6}раа\ =0;$$

$$e_{„}(/) = 4.1.06^{2} \cdot 3.71\text{-}10^{6}\ \ (8.68\text{-}10\sim^{3} \cdot 1.06\text{-}1.2485\text{-}2.5\text{-}10\sim^{4} \cdot 1.0620)\text{-}$$

$$-21\text{-}10^{4}\ \ 0.8908=187.1131\text{-}187.068 = 0.0451кН * 0.$$

Следовательно, величины y_0 и $ф_0$ определены верно.

2. *Определение прогибов, углов поворота и внутренних усилий*

Разобьем балку на 10 участков. Используем симметрию задачи, поэтому будем рассматривать только половину балки, т.е. сечения 0, 1, 2, 2', 3, 4, 5 (см. рис. 3.9, *а).* Расчеты будем вести в табличной форме (см. табл. 3.8). Поэтому, согласно (3.52), запишем выражения прогибов, углов поворота и внутренних усилий для I и II участков

$$Я*) = Уо \qquad + <Р0\ U_{2}\{рх) + \sim \cdot t/_{4}(р \cdot (х - \quad ;$$

$$<p(x) = -4 \cdot Уо \cdot £/_{4}(N + <Р0 \cdot \qquad + - \underset{г}{£} - Щ\ Н^{x} \sim °\%_{x>0}'$$

$$M(x) = 4\ \ EJ_{Z}.\ [y_{0} \cdot U_{3}(px) + cpo \cdot t/_{4}(p*)] - P\ \ U_{2}(p - (x - й))|_{x>a}\ ;$$

$$Q\{x) = 4 \cdot EJ_{Z} \cdot |уо \cdot U_{2}\{рх) + фо \cdot f/_{3}(рх)] - Р\ \ t/i(р\ \ (х\text{-}_{f1}))|_{x>f1}.$$

Участок I.

Сечение 0, х = 0.

$$уо = 8.68\text{-}10''^{3}\ м;\ фо = -2.5\text{-}10''^{4}\ рад;\ М_{0} = 0;\ (?_{0} = 0.$$

Сечение 1, х = 0,27 м.

$$y(x) = 8{,}68 \cdot 10''^{3} \cdot 0{,}9986 + \ \underline{\triangle\triangle} \cdot \qquad = 8{,}597\text{-}10''^{3}\ м;$$

$$<p(x) = -4 \cdot 8{,}68 \cdot 10\sim^{3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}0045\text{-}2{,}5 \cdot 10''^{4} \cdot 0{,}9998 =$$

$$= -2{,}51\ КГ^{4}\ рад;$$

$$M(x) = 4 \cdot 1{,}06 \cdot 3{,}71Ю^{6}[8{,}68 \cdot 10''^{3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}0450\text{-}2{,}5 \cdot 10\sim^{4} \cdot 0{,}0045] =$$

$$= 6{,}495\ кН\ \ м\ ;$$

$$0(x) = 4 \cdot 1{,}06^{2} \cdot 3{,}71 \cdot 10^{6} \cdot [8{,}68 \cdot 10''^{3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}2999\text{-}2{,}5 \cdot 10''^{4} \cdot 0{,}0450] =$$

$$= 45{,}822\ кН.$$

Сечение 2, х = 0.54 м.

$$y(x) = 8{,}68 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}9784 + \frac{\text{O S 1П}^{-4}}{1{,}06} - 0{,}5974 = 8{,}352 \cdot 10^{-3}\text{м};$$

$$<p(x) = -4 \cdot 8{,}68 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}0360 - 2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}9784 =$$

$$= -15{,}7 \cdot 10^{-4}\text{рад};$$

$$Л/(x) = 41{,}06 - 3{,}7М0^{6}[8{,}68\ \ 10^{-3}\ \ 1{,}06\ \ 0{,}1797 - 2{,}5\ \ 10^{-4}\ \ 0{,}0360] =$$

$$= 25{,}867\text{кН-м};$$

$$e(x) = 4 \cdot 1{,}06^{2} - 3{,}71 \cdot 10^{6} \cdot [8{,}68 \cdot 10^{-3} - 1{,}06 \cdot 0{,}5974 - 2{,}5 \cdot \text{КГ}^{-4} \cdot 0{,}1797] =$$

$$= 90{,}90\text{кН}.$$

Участок II.

Сечение 2', х = 0.54 м.

$$y(x) = 8{,}68 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}9784 + \frac{-9\ 5\ 1\text{П}^{-4}}{1{,}06} - 0{,}5974 =$$

$$= 8{,}352\ \ 10^{-3}\text{м};$$

$$<p(x) = -4 \cdot 8{,}68 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}0360 - 2{,}5 \cdot \text{Ю}^{-4} \cdot 0{,}9784 =$$

$$= -15{,}7\ \ 10^{-4}\text{рад};$$

$$M(x) = 4 \cdot 1{,}06 \cdot 3{,}71 \cdot 10^{6}[8{,}68 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}1797 - 2{,}5 \cdot \text{Ю}^{-4} \cdot 0{,}0360] =$$

$$= 25{,}867\text{кН} \cdot \text{м};$$

$$<2(x) = 4 \cdot 1{,}06^{2} \cdot 3{,}71 \cdot 10^{6}\ \ [8{,}68 - 10^{-J} - 1{,}06\ \ 0{,}5974 - 2{,}5 - \text{Ю}^{-4} \cdot 0{,}1797] -$$

$$-210\ \ 10^{3}\ \ 1{,}0000 = -119{,}10\text{кН}.$$

Сечение 3, х = 0.81 м.

$$\text{уЫ} = 8{,}68\text{-Ю}^{-3}.0{,}8908 + \frac{\sim^{2} - ^{5}\ \ \wedge}{1{,}06}\ \ 0{,}8803 + \text{™}\ \ \frac{\text{f}}{1{,}06\ \ -3{,}71\ \ 10} =$$

$$= 7{,}738\ \ 10^{-3}\text{м};$$

$$<p(x) = -4 \cdot 8{,}68 \cdot \text{Ю}^{-3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}1211 - 2{,}5 \cdot \text{Ю}^{-4} \cdot 0{,}8908 + \frac{2\ 1\ 0\ \ 10\ \ 0{,}0450}{1{,}06\ \ -3{,}7110}$$

$$= -24{,}13 - \text{Ю}^{-4}\text{рад};$$

$$M(x) = 4\ \ 1{,}06\ \ 3{,}71 - 10^{6}[8{,}68 \cdot \text{Ю}^{-3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}4020 - 2{,}5 - \text{Ю}^{-4} \cdot 0{,}1211] -$$

$$= 1{,}708\text{кН-м};$$

$$Q(x) = 4 \cdot 1{,}06^{2} \cdot 3{,}71 \cdot 10^{6} \cdot [8{,}68 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}8803 - 2{,}5 \cdot \text{Ю}^{-4} \cdot 0{,}4020]$$

$$-210\text{-Ю}^{3} \cdot 0{,}9986 = -76{,}33\text{кН}.$$

Сечение 4, x = 1.08 м.

$$y(0.8) = 8{,}68\cdot10^{-3}\cdot0{,}6562 + \frac{2{,}5\cdot10^{-4}}{1{,}06}\cdot1{,}1173 + \frac{210\cdot10^{3}\cdot0{,}036}{1{,}06\cdot3{,}71\cdot10^{6}} =$$

$$= 7{,}14\cdot10^{-3}\text{м};$$

$$\varphi(x) = -4\cdot8{,}68\cdot10^{-3}\cdot1{,}06\cdot0{,}2851 - 2{,}5\cdot10^{-4}\cdot0{,}6562 + \frac{210\cdot10^{3}\cdot(-0{,}1797)}{1{,}06\cdot3{,}71\cdot10^{6}} =$$

$$= -19{,}38\cdot10^{-4}\text{рад};$$

$$M(x) = 4\cdot1{,}06\cdot3{,}71\cdot10^{6}[8{,}68\cdot10^{-3}\cdot1{,}06\cdot0{,}7034 - 2{,}5\cdot10^{-4}\cdot0{,}2851] - \frac{210\cdot10^{3}\cdot0{,}5974}{1{,}06} = -17{,}67\text{кНм};$$

$$Q(x) = 4\cdot1{,}06^{2}\cdot3{,}71\cdot10^{6}\cdot[8{,}68\cdot10^{-3}\cdot1{,}06\cdot1{,}1173 - 2{,}5\cdot10^{-4}\cdot0{,}7034] - 210\cdot10^{3}\cdot0{,}9784 = -36{,}98\text{кН}.$$

Сечение 5, x = 1.35 м.

$$y(1.35) = 8{,}68\cdot10^{-3}\cdot0{,}1663 + \frac{2{,}5\cdot10^{-4}}{1{,}06}\cdot1{,}2485 + \frac{210\cdot10^{3}\cdot0{,}1211}{1{,}06\cdot3{,}71\cdot10^{6}} =$$

$$= 6{,}90\cdot10^{-3}\text{м};$$

$$\varphi(x) = -4\cdot8{,}68\cdot10^{-3}\cdot1{,}06\cdot0{,}5490 - 2{,}5\cdot10^{-4}\cdot0{,}1663 + \frac{210\cdot10^{3}\cdot0{,}4402}{1{,}06\cdot3{,}71\cdot10^{6}} =$$

$$= 5{,}1\cdot10^{-7}\text{рад};$$

$$M(x) = 4\cdot1{,}06\cdot3{,}71\cdot10^{6}[8{,}68\cdot10^{-3}\cdot1{,}06\cdot1{,}0620 - 2{,}5\cdot10^{-4}\cdot0{,}5490] - \frac{210\cdot10^{3}\cdot0{,}8803}{1{,}06} = -22{,}85\text{кН}\cdot\text{м};$$

$$Q(x) = 4\cdot1{,}06^{2}\cdot3{,}71\cdot10^{6}[8{,}68\cdot10^{-3}\cdot1{,}06\cdot1{,}2485 - 2{,}5\cdot10^{-4}\cdot1{,}0620] - 210\cdot10^{3}\cdot0{,}8908 = -0{,}045\text{кН} \approx 0.$$

Результаты расчетов внесены в таблицу 3.8 и по этим значениям построены эпюры прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил (см. рис. 3.9, *б, в, г).*

Таблица 3.8

N° сеч.	*	P*	P(x-a)		$И_2$		C4	y_i, 10^{-2} м	<P, Ю-^{3} рад	M, кНм	Q, кН
0	0	0	-	1.000	0.000	0.000	0.000	8.680	-0.250	0.000	0.000
1	0.27	0.3	-	0.999	0.299	0.045	0.004	8.597	-0.251	6.50	45.82
2	0.54	0.6	-	0.978	0.597	0.179	0.036	8.352	-1.570	25.87	90..90
2'	0.54	0.6	0.0	0.978	0.597	0.179	0.036	8.352	-1.570	25.87	-119.1
3	0.81	0.9	0.3	0.891	0.880	0.402	0.121	7.738	-2.413	1.71	*-76.33*
4	1.08	1.2	0.6	0.656	1.117	0.703	0.285	7.143	-1.938	-17.67	-36.98
5	1.35	1.5	0.9	0.166	1.249	1.062	0.549	6.904	0.000	-22.85	-0.04

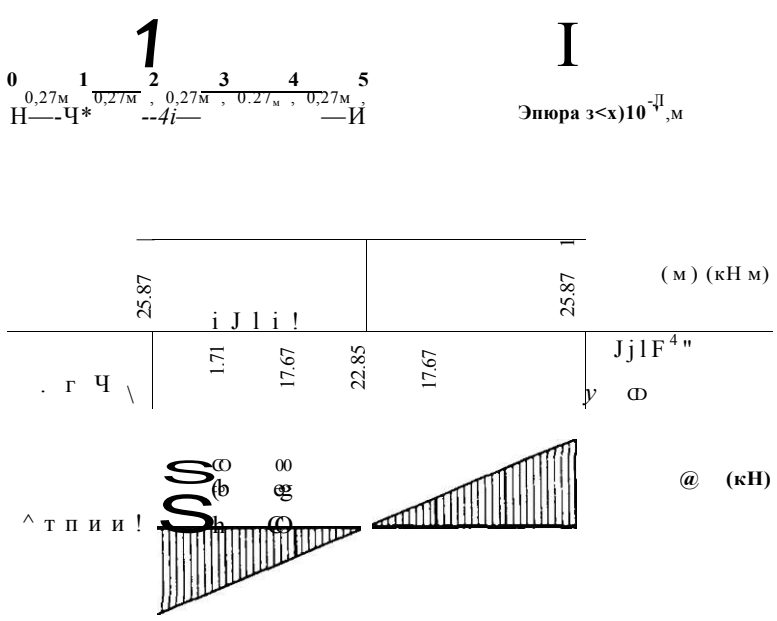


Рис. 3.9

Вопросы для самопроверки

1. Раскройте суть гипотезы Винклеровского основания.
2. Поясните физический смысл коэффициента постели.

3. Дайте определение относительно коротких балок и балок бесконечной длины.
4. Подчеркните отличительные особенности между дифференциальными уравнениями изгиба обычных балок и балок на упругом основании.
5. Какими свойствами должны обладать функции Крылова?
6. Сформулируйте условия достаточной жесткости и прочности конструкций на упругом основании.

ГЛАВА 4

УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

4.1. Предмет и задачи устойчивости

Устойчивостью называется способность сооружений сохранять свое первоначальное положение или первоначальную форму равновесия в деформированном состоянии при действии внешних сил.

В соответствии с этим надо различать *устойчивость положения сооружения* и *устойчивость форм равновесия* в нагруженном состоянии.

Положение сооружения или форма равновесия в *нагруженном* состоянии считается *устойчивым,* если при всяком, сколь угодно малом дополнительном возмущении, сооружение отклоняется от исследуемого положения или равновесного состояния, однако после исчезновения дополнительного возмущения полностью возвращается в исходное состояние (для упругих систем), или проявляет тенденцию к возвращению в исходное состояние (для упругопластических систем).

Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считается *неустойчивым,* если при каком-либо сколь угодно малом отклонении от исследуемого равновесного состояния и после исчезновения возмущения сооружение не проявляет тенденцию к уменьшению получаемых отклонений, а иногда отклоняется еще далее — до нового положения или новой формы равновесного состояния.

Переход сооружения из одного равновесного состояния к другому равновесному состоянию называется *потерей устойчивости системы.* Состояние перехода называется *критическим состоянием.* При этом величины внешних сил, действующие на сооружение, называются *критическими.*

Как это следует из понятия устойчивости, в механике различают два вида потери устойчивости сооружения: *потерю устойчивости положения* и *потерю устойчивости, вызванной сменой формы равновесного состояния.*

В качестве примера потери устойчивости положения сооружения рассмотрим равновесное положение жесткой пластинки, изображенной на рис. 4.1, расположенной на двух опорах при действии собственного веса величиной G и силы P.

Учитывая, что левая подвижная опора способна развить реакцию только вверх, т.е. представляет собой одностороннюю связь, следовательно, при условии $Ph < G$^ состояние пластинки является устойчивым. В данном случае левая опорная реакция - величина кочечная и направлена вверх.

С ростом силы P, при $Ph = G$^ левая опорная реакция принимает нулевое значение, а равнодействующая сил *P* и *G* пройдет через правый шарнир. Это признак того, что наступило критическое состояние. Поэтому значение силы P считается критическим и обозначается $P_{кр}$.

Очевидно, что даже при незначительном росте величины силы P произойдет опрокидывание пластины и она займет новое равновесное положение, т. е. произойдет потеря устойчивости положения пластины.

При изучении потери устойчивости сооружений, связанной со сменой формы деформированного состояния, в строительной механике различают два рода потери устойчивости.

Потерю устойчивости, связанную только со сменой формы деформированного состояния, называют *потерей устойчивости первого рода,* что свойственно только упругим системам.

Потерей устойчивости второго рода принято называть первое предельное состояние системы по несущей способности системы, т.е. состояние системы, когда при дальнейшем увеличении внешних сил равновесие между внешними и внутренними силами нарушается.

Основная задача теории устойчивости заключается в определении критических значений внешних сил. При этом наибольшее практическое значение имеет определение критических значений внешних сил при потере устойчивости системы по первому роду.

4.2. Критерии определения устойчивости упругих систем

В теории устойчивости основными критериями определения критических значений внешних нагрузок являются *энергетический, динамический* и *статический.*

В основе энергетического критерия заложен известный *принцип Лагранжа-Дирихле,* согласно которому, если система на-

ходится в состоянии устойчивого равновесия, ее полная потенциальная энергия обладает минимумом по сравнению со всеми соседними состояниями системы; если в состоянии неустойчивого равновесия — то максимумом; а если в *безразличном',* т.е. критическом — то потенциальная энергия является постоянной величиной.

В общем случае изменение (*вариацию*) полной потенциальной энергии системы *dU* при переходе ее от рассматриваемого состояния к соседнему можно записать таким образом:

$$dU = dV - dT,$$

где *dV*— вариация потенциальной энергии внутренних сил; *dT* — вариация потенциальной энергии внешних сил.

Следовательно, критическое состояние системы, согласно энергетическому критерию, определяется из условия

$$dU = 0 \quad \text{или} \quad dV = dT.$$

При решении задач устойчивости по динамическому критерию исходят из предположения, что колеблющаяся система около своего положения равновесия не способна возвращаться к первоначальному положению. Данное предположение равносильно утверждению, что в критическом состоянии спектр собственных частот рассматриваемой системы стремится к нулю, т.е. $\omega_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Здесь ω_i — собственная частота рассматриваемой системы при 1-й форме колебаний.

Следовательно, при решении задач по динамическому критерию составляется уравнение собственных колебаний заданной системы, далее определяется выражение частот собственных колебаний, и из условия их равенства нулю определяется критическое значение внешних сил.

Так, например, для сжатого осевой продольной силой P стержня постоянного поперечного сечения с распределенной массой, частота основного тона поперечных колебаний выражается формулой

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{P}{P_{кр}}},$$

где ©о — собственная частота поперечных колебаний при отсутствии сжимающей силы, т.е. при P= 0.

Очевидно, что при $P_{кр}$, со-»0 и период колебаний Г= = 2 л/со **-»оо,** т.е. стержень, колеблющийся около своего положения равновесия, не способен возвращаться к первоначальному состоянию.

Суть статического критерия заключается в следующем. Исследуемой системе задается отклоненная форма равновесия, совпадающая по характеру перемещений с ожидаемой новой формой равновесного состояния системы после потери устойчивости системы, и определяются значения рассматриваемых внешних нагрузок, способных удержать систему в новой форме равновесного состояния.

Значения внешних нагрузок, способных удержать систему в новом равновесном состоянии, при соблюдении граничных условий по исходному состоянию, являются критическими.

В дальнейшем здесь рассматривается решение задач теории устойчивости с применением только статического критерия, так как он является основным критерием при выполнении практических расчетов упругих консервативных систем.

4.3. Задача Эйлера

Рассмотрим решение задачи устойчивости упругого стержня, постоянного поперечного сечения, расположенного на двух шарнирно-опертых концах, при действии продольной силы переменной величины P (рис. 4.2).Впервые эта задача была поставлена и решена JI. Эйлером в середине XVIII века.

На начальном этапе действия постоянно возрастающей силы P очевидно, что в поперечных сечениях стержня возникают только продольно-сжимающие силы и стержень испытывает сжатие, сохраняя прямолинейную форму деформированного состояния (1). Считая данную форму деформированного состояния в качестве начальной, предполагают, что при некотором значении внешней силы $P = P_{кр}$ стержень изогнется, т.е. в некотором новом равновесном состоянии принимает искривленную форму (2), изображенную на рис. 4.2.

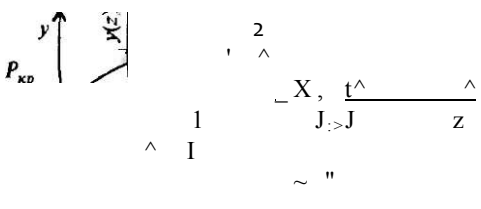


Рис. 4.2

Обозначая величину прогибов стержня через y(z) в сечении, расположенном на расстоянии *z* от начала системы координат *yz,* значения изгибающих моментов в указанном поперечном сечении от действия внешней силы P принимают значения

$$M = -Py.$$

Из теории изгиба, *при малых* прогибах и пренебрегая продольными деформациями, деформированное состояние стержня за счет изгиба, описывается уравнением

$$EJ_x y = M = -Py. \tag{4.1}$$

Принимая обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EJ_x}, \tag{4.2}$$

уравнение (4.1) можно представить в следующем виде:

$$y'' + \kappa^2 y = 0. \tag{4.3}$$

Решение (4.3) имеет следующий вид:

$$y = Cy \sin kz + C_2 \cos kz. \tag{4.4}$$

Произвольные постоянные Cy и C_2 определяются из граничных условий закрепления балки, т.е. y (0) = 0; y(1) = 0.

Из первого условия вытекает, что $C_2 = 0$, а из второго

$$Cy \sin kl = 0 . \tag{4.5}$$

Последнее уравнение имеет два возможных решения: либо Cy = = 0, либо же $\sin kl = 0$.

В первом случае получается, *что* $Cy = C_2 = 0$ *и* перемещения, согласно (4.4), тождественно равны нулю, т.е. $y = 0$. Это решение, очевидно, соответствует первоначальному равновесному состоянию, которое нас не интересует. Во втором случае, т.е. предполагая, что Q * 0, из (4.5) следует, что $\sin \kappa/ = 0$. Откуда следует, что $kl = nn$, где л = 1 , 2 , 3,... С учетом выражения (4.2), получим

$$\kappa p _ \frac{n^2 n^2 EJ_x}{{}_{\ell}2}$$

Наименьшая критическая сила $P_{кр}$ получается при $n = 1$

Эта сила носит название первой *критической* или *эйлеровой силы.* Решение (4.4) при Cy *ф* 0 $C_2 = 0$ принимает вид $y = C'y \sin\frac{nnz}{}$

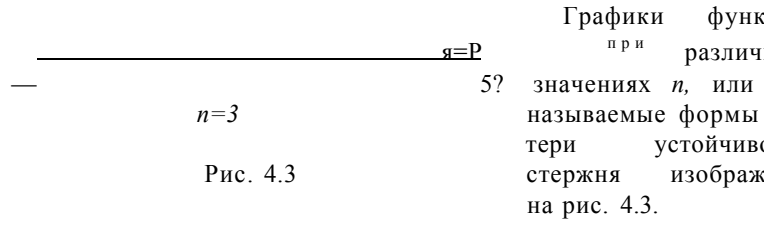


Рис. 4.3

Графики функции $\frac{P}{P_{кр}}$ при различных значениях n, или так называемые формы потери устойчивости стержня изображены на рис. 4.3.

При выполнении практических расчетов, как правило, определяется критическое значение внешней силы, соответствующее низшей форме потери устойчивости системы. Поэтому мы далее будем рассматривать решение задачи по определению только наименьшего значения критических сил.

4.4. Устойчивость стержней с различными концевыми условиями их закрепления

Рассмотрим однопролетный упругий стержень постоянного поперечного сечения, по концам которого приложены сжимающие силы P, всегда направленные параллельно оси недеформированного стержня. Поместим начало системы декартовых координат *xyz* в центре тяжести левого крайнего сечения. Ось **Z** направим по продольной недеформированной оси стержня, а ось *y* — по направлению наименьшей жесткости поперечного сечения.

С целью введения различных условий закрепления в концевых сечениях стержня предполагается, что в новом равновесном (критическом) состоянии (2) в общем случае могут быть приложены поперечные силы и изгибающие моменты. Кроме того, концевые сечения могут перемешаться перпендикулярно оси недеформированного стержня и поворачиваться вокруг оси x (рис. 4.4).

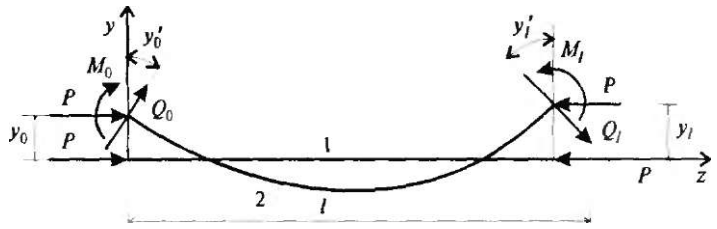


Рис. 4.4

Дважды дифференцируя каждый член уравнения (4.1), получим дифференциальное уравнение, описывающее деформированное состояние рассматриваемого стержня в общем виде:

$$^{x}\ dz^{A} \qquad dz^{2} \ = \ 0\,. \tag{4.7}$$

Общее решение которого имеет вид:

$$y \ = \ C_l{+}C_2 z \ + \ C_3 \ \sin \ kz \ + \ C_4 \ \cos \ kz. \tag{4.8}$$

Составляя первые три производные от функции прогиба, составим выражение для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в произвольном сечении, расположенном на расстоянии 0 < z < / от начала принятой системы координат:

$$\begin{aligned} y' \ &- \ C_2 \ + \ \mathrm{C}_3 \ \kappa \ \cos \ kz{-}C_4 k \ \sin \ kz \ ; \\ M \ &= \ EJy{-}Y'' \ = \ -EJ_x \ \kappa^2 \ C_{\text{ь}} \ \sin \ kz \ - \ EJ_x \ k^2 \ \mathrm{C}_4 \ \cos \ kz \ ; \\ Q \ &= \ EJ_{x'} \ y''' \ = \ -EJ_X \ \kappa^{\text{ь}} \ \mathrm{C}_3 \ \cos \ kz \ + \ EJ_X \ \kappa^{\text{ь}} \ C. \ \sin \ kz \ . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Произвольные постоянные Q, **C2, C3** и **C4** определяются из граничных условий закрепления стержня. Очевидно, что произвольные постоянные в первоначальном, т.е. докритическом равновесном состоянии независимо от граничных условий закрепления стержня, тождественно приравнивают нулю, так как в первоначальном равновесном состоянии (1) (см. рис. 4.4) имеем:

$$Y = Y' = Q_y = M_x = 0.$$

В новом равновесном (критическом) состоянии необходимо учесть, что независимо от граничных условий закрепления стержня произвольные постоянные *C\, C2,* C3 и *C4* одновременно не могут быть равными нулю. Данное обстоятельство является необходимым и достаточным условием для определения нового равновесного состояния системы соответственно величинам критических значений внешних продольных сил P.

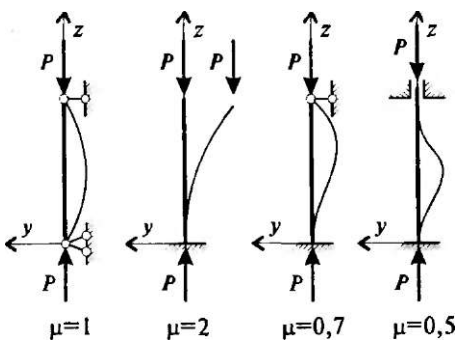


Рис. 4.5

Продемонстрируем данный подход при решении задач по определению критической величины силы P для стержней с различными концевыми условиями закрепления (рис. 4.5.).

В случае, когда стержень с двумя концами шарнирно-оперт (рис. 4.5, *а),* граничные условия задачи имеют вид:

$$y(0)=y(1)=0\backslash \qquad M_x\ (0) = M_x(1) = 0.$$

Подставляя выражения прогиба и изгибающего момента соответственно из (4.8) и (4.9) в граничные условия задачи, получим

$$\begin{aligned} &Cj + C_4 = 0;\\ &Cj + C_2 / + C_3 \sin W + C_4 \cos A:/ = 0;\\ &-k^2 EJ_x C_4 = 0;\\ &k^2 EJ_x C_3 \sin Л/ - k^2 EJ_x C_4 \cos W = 0. \end{aligned}$$

Однако из третьего уравнения, а затем из первого уравнения последней системы легко установить, что в данном случае $C_4 = 0$, $C| = 0$, следовательно, алгебраическая система относительно неизвестных произвольных постоянных принимает вид:

$$\begin{aligned} &f\ Cjl + C3 \sin kl = 0;\\ &\backslash -k^2 EJ_x C_3 \sin kl = 0. \end{aligned}$$

Так как Cj и Cj одновременно не могут быть равными нулю в новом — критическом равновесном состоянии стержня, поэтому необходимо требовать, чтобы определитель последней системы однородных уравнений был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} \sin kl & \\ -k^2 EJ & \sin kl \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad -\kappa^2 l\ EJ_x \sin kl = 0.$$

Откуда следует, что sinAV = 0. Из решения последнего уравнения получим $\kappa =$, $(n = 1, 2, 3...)$.

С учетом (4.2), при п - 1, выражение наинизшего значения критической силы $Р_{кр}$ окончательно определяется:

$$Ркр \quad k\ EJ_x - \frac{л\ ^2 EJ_r}{l^2}$$

Последнее выражение, как нетрудно заметить, полностью совпадает с результатом решения задачи Эйлера.

Для стержня, изображенного на рис. 4.5, 6, граничные условия задачи имеют вид:

$$y(1) = y'(1) = 0; \qquad M_x ф) = 0; \quad M_x(l) = Py_0 = EJ_X\ \kappa^2 y_0.$$

Подставляя выражения прогибов, углы поворотов и изгибающих моментов в граничные условия задачи, получим:

$$C, + C_2 l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = O$$
$$C_2 + C_3 \kappa \cos kl - C_4 \kappa \sin kl = O$$
$$-k^2 EJ_x Ct = O$$
$$- k^2 EJ \quad C_3 \sin Л/ - k^2 EJ \quad \cos W = EJ \quad \kappa^2 (C, + C_4).$$

Из третьего уравнения следует, что $C_4 = 0$. С учетом данного обстоятельства последняя система уравнений окончательно записывается в виде

$$Ci + C_2 / + C_3 \sin Л/ = 0;$$
$$C_2 + C_3 k \cos kl = 0\backslash$$
$$C, + C_3 \sin kl = 0.$$

Откуда имеем

$$\begin{vmatrix} I & I & \sin kl \\ 0 & 1 & A \cos kl \\ 1 & 0 & \sin kl \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и после некоторых преобразований получим: $\cos kl = 0$. Наименьший корень данного уравнения является kl - у. Следовательно, критическое значение внешней силы определяется по формуле

$$P_{Kp} = k * E J_x = \frac{n^2 EJ_x \quad я^2 EJ_X}{(2'Г \quad 4/}$$

Для стержня, изображенного на рис. 4.5, ***в*** граничные условия задачи записываются в виде $>>(0) = y(I) = 0$; у $(/) = 0$; $M_x(0) = 0$. Следовательно, система уравнений относительно произвольных постоянных в данном случае записывается в форме

$$C\,! + C_4 = 0;$$
$$C, + C_2 / + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0;$$
$$C2 + C3\ \kappa \cos kl \quad \kappa \sin kl = 0\backslash$$
$$-k^2 EJ_x \quad C_4 = 0.$$

Из последнего уравнения имеем, что $C_4 = 0$, следовательно, в первом уравнении $Q = 0$. Поэтому система уравнений преобразуется к виду

$$C_2 l + C_3 \sin kl = 0;$$
$$C_2 + C_ъ \; k\cos kl = 0,$$

определитель которого в критическом состоянии стержня должен быть равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} / & \sin kl \\ 1 & \kappa \cos kl \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда имеем $\operatorname{tg} kl = kl$. Наименьший корень последнего уравнения принимает значение $kl = 4.49$, следовательно,

$$p_{кр} = \frac{n^2 EJ_x}{(0.71)^2} = \frac{4492 EJ_x}{l^2}.$$

И наконец, рассмотрим стержень с двумя защемленными концами, изображенный на рис. 4.5, г, граничные условия которого удовлетворяют условиям $y(0) = y(t) = 0;\ y(0) = y(I) — 0.$

$$C_1 + C_4 = 0;$$
$$C_1 + C_2 l + c_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0;$$
$$C_2 + C_3 k = 0;$$
$$C_2 + C_3 k \cos kl - C_4 k \sin kl = 0.$$

Откуда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 1 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & k\cos kl & -k \sin kl \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая последний определитель и после ряда преобразований получим: $k I \sin kl = 2 \cdot (1 - \cos kl)$, наименьший корень которого имеет значение $kl = 2л$. Следовательно, критическое значение силы Рбудет

$$P_{кр} = \frac{4n^2 EJ_x}{l^2} = \frac{n^2 EJ_x}{(0.5/\Gamma} = \frac{4n^2 EJ_x}{l^2}.$$

4.5. **Выражения изгибающих моментов и** поперечных *сил в* **концевых сечениях стержней**

Следуя статическому критерию, при решении задач устойчивости рамных систем, метод перемещений, наряду с другими классическими методами, является наиболее эффективным методом.

При применении метода перемещений для решения задач устойчивости статически неопределимых рамных стержневых систем, важным этапом является определение выражения внутренних усилий узловых сечений элементов основной системы, с учетом наличия продольной силы при единичном угловом или линейном смещении узлов основной системы.

В связи с этим для расчета рам ***на*** устойчивость необходимо предварительно определить выражение изгибающих моментов и поперечных сил в концевых сечениях стержней при различных концевых условиях их закрепления и одновременном действии продольной сжимающей силы и единичном линейном или угловом смешении одного из концов рассматриваемого стержня.

С этой целью постоянные $C_{[y}$ C_2, Q, Q в выражениях (4.8) и (4.9) выразим через начальные параметры уо , уо, Л/о , Qo стержня, изображенного на рис. 4.4. С учетом начальных условий, т.е. $y = {}^{=}$ Уо . *У'~Уо, М*$_x$= Л/$_0$, Q_y = *Qo* при Z = 0 из (4.8) и (4.9) получим

$$\begin{aligned} Q + Q &= y_0; \\ C_2 + C_3\kappa &= yb; \\ -k^2 EJ_x\, C_4 &= M_0 \\ -k^2 EJ_x C_3 &= Q_0. \end{aligned}$$

Откуда, определяя выражения постоянных и подставляя в выражения (4.8) и (4.9), получим

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_0' z + \frac{M_0}{k^2 EJ_x}(1 - \cos kz) + \frac{Q_0}{k^3 EJ_x}(kz - \sin kz); \\ y^1 &= y_0' + \frac{M_0}{k\, EJ_x}\sin kz + \frac{Q_0}{k^2 EJ_x}(1 - \cos kz); \\ M_x &= M_0 \cos kz + \frac{Q_0}{K} \sim \sin kz, \\ Q_y &= -M_0\, \kappa \sin kz + Q_0 \cos kz. \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Для дальнейшего нужно будет иметь выражения изгибающих моментов и поперечных сил на концевых сечениях стержня при двух вариантах закрепления — жестко защемленного с двумя концами, жестко защемленного на одном конце и шарнирно опертого на другом.

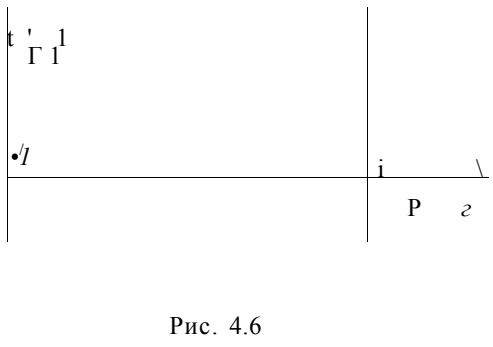


Рис. 4.6

Подробно рассмотрим стержень, изображенный на рис. 4.6 при = 1- Для деформированного состояния (2) имеем следующие граничные условия:

Уо =*У1* =0;

УЬ = 1; *У1* =о.

С учетом последних условий из первых двух уравнений (4.10) получим

$$/ + \frac{}{k^2EJ}(1 - \cos kl) + \frac{}{k^3EJ_x}(kl - \sin kl) = 0;$$
$$1 + \frac{Л/,}{к\ EJ}\sin kl + \frac{}{kEJ\ v}(1 - \cos kl) = 0. \qquad (4.11)$$

Вводя обозначения: $i = \frac{EJ}{/}$; $v = kl = \sqrt{\frac{PI^2}{EJ_V}}$

$$Ф1 \frac{(tgv - v)}{8\,tgv\,|\,tg - \sim -}; \quad Ф2 \frac{v(v - sinv)}{4\sin v\,|\,tg — \bullet}; \quad Ф3 = \frac{2.\ V}{12\ tg^{g}2} - 3'$$

Решение систем уравнений (4.11) можно записать в следующем виде (значения специальных функций приведены в табл. 4.1):

$$<2о = -\frac{6/}{у}Ф_3(у), \qquad Л/_0 = 4/ср!(v).$$

Опорные реакции Q/ и Л// на противоположном конце стержня определяются из условия ее равновесия, т.е. Ху = 0; £ $M_л$ =0. Из первого уравнения получим *QQ*= - *Q/,* а из второго M_t = 2/<p_2(0).

Теперь предположим, что продольная сжимающая сила Р— 0. В этом случае все расчетные зависимости сильно упрощаются и принимают вид

Ф1 = Ф2 = Фз = 1; М) = 4 /; *M/=2 i*; Q_0 = - у - ; О/ = ***-Qo -***

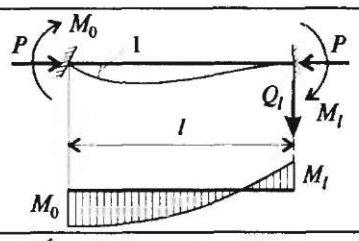
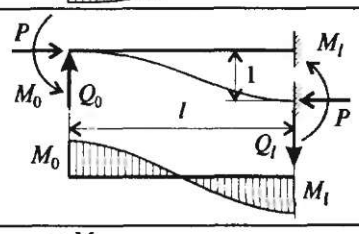
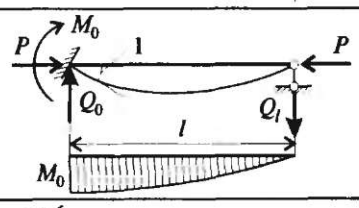
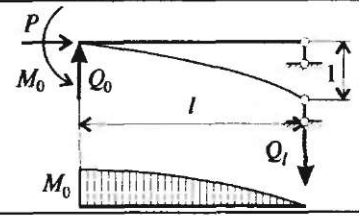
Таблица 4.1

V	<Pl(v)	$ip_2(v)$	<P3(v)	4M(v)	<P7(v)	4>8(v)
0.0	1 0000	1.0000	1 0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.2	0.9986	1.0009	0 9992	0.9959	0 9973	0.9840
0.4	09945	1 0026	0 9973	0.9840	0 9893	0.9350
0.6	0 9881	1 0061	0.9941	09641	0.9758	0.8558
0.8	0.9787	1.0111	0.9895	0.9362	0.9565	0.7432
1.0	0.9662	1.0172	0.9832	0.8999	0.9313	0.5980
1.2	0.9511	1.0251	0.9756	0.8566	0.8998	*0.4198*
1.4	0.9329	1.0348	0.9669	0.8025	0.8613	0.2080
1.6	0.9116	1.0463	0 9567	0.7431	0 8152	-0.0381
1.8	0.8871	1.0600	0 9449	0.6749	0 7606	-0.3194
2.0	0.8590	1.0760	0.9313	0.5980	0.6961	0.6372
2.2	0.8273	1.0946	0.9164	05131	0.6202	-0.9932
2.4	0.7915	1.1164	0.8998	0.4198	0.5304	-1.3896
2.6	0.7513	1.1417	0.8814	0.3181	0.4234	-1.8299
2.8	0.7064	1.1712	0.8613	0.2080	0.2944	-2.3189
3.0	0.6560	1.2057	0 8393	0.0983	0 1361	-2.8639
3.2	0.5997	1.2463	08153	-0.0380	-0 0635	-3.4769
3 4	0.5366	1.2940	0.7891	-0.1742	-0.3248	-4.1781
3.6	0.4656	1.3508	0.7609	-0.3191	-0.6862	-5.0062
3.8	0.3850	1.4191	0.7297	-0.4736	-1.2303	-7.0436
4.0	0.2933	1.5018	0.6961	-0.6372	-2.1717	-7.5060
4.2	0.1877	1.6036	0 6597	-0.8103	-4.3156	-10.1956
4.4	0 0648	1.7310	0 6202	-0-9931	-15 3271	-21.7815
4.5	-0.0050	1.8070	0 5990	-1.0880	227 9292	222.1820
4.6	-0.0807	1.8933	0.5772	-1.1861	14.6693	7.6160
4.8	-0.2572	2.1056	0.5305	-1.3896	5.4023	-2.2777
5.0	-0.4772	2.3924	0.4793	-1.6040	3.3615	-4.9719
5.2	-0.7630	2.7961	0.4234	-1.8299	2.3986	-6.6147
5.4	-1.1563	3.3989	0.3621	-2.0679	1 7884	-7.9317
5.6	-1.7481	4.3794	0 2944	-2-3189	1 3266	-9.1268
5.8	-2.7777	62140	0.2195	-2.5838	0 9302	-10.2831
60	-5.1589	10.7270	0.1361	-2-8639	0.5551	-11.4449
6.2	-18.5940	37.3080	0.0424	-3.1609	0.1700	-12.6433

Выражения изгибающих моментов и поперечных сил из (4.10) также сильно упрощаются, учитывая, что при P -> 0 и $\kappa = \sqrt{1 - P}$ • 0, а в этом случае $\cos kz$ -> 1; $\frac{\sin kz}{\kappa}$ • 1, последние

два выражения (4.10) принимают общеизвестный вид и записываются следующим образом: M_x = Л/о + Go $Qy^{=}Qo$

Таблица 4.2

Вид смещения и эпюра M	M_0	M_l	$Q_0 = Q_l$
	$4\,i\,\varphi_1(\nu)$	$2\,i\,\varphi_2(\nu)$	$-\frac{6i}{l}\varphi_3(\nu)$
	$\frac{6i}{l}\varphi_3(\nu)$	$\frac{6i}{l}\varphi_3(\nu)$	$\frac{12i}{l^2}\varphi_4(\nu)$
	$3\,i\,\varphi_7(\nu)$	0	$-\frac{3i}{l}\varphi_7(\nu)$
	$\frac{3i}{l}\varphi_7(\nu)$	0	$\frac{3i}{l^3}\varphi_8(\nu)$

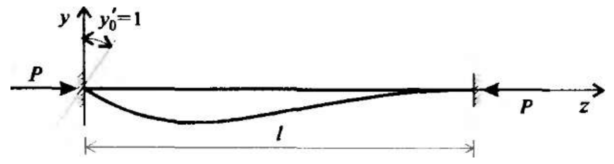
Аналитические выражения специальных функций

$$\phi_1 = \frac{\nu\,(\mathrm{tg}\,\nu - \nu)}{\left[\mathrm{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right]} \qquad \Phi_2 = \frac{\nu(\nu - \sin\nu)}{4\sin\nu\left[\mathrm{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right]} \qquad \Phi_3 = \frac{\nu^2\,\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}}{12\left(\mathrm{tg}\frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\nu^1 \qquad \nu\,l\,\mathrm{tg}\nu \qquad \ddot{\nu}^3$$

- i ^ F S r ^ K ^ F ?

Следовательно, при P 0 и эпюры внутренних силовых факторов существенно трансформируются. Характер трансформации эпюры M_x при P 0 изображен на рис. 4.7.



Эпюра М при Р*О

4|Ф,

Эпюра *М* при *Р*= О ^пГТТТТ1ТШ2/

4/

Рис. 4.7

Результаты аналогичных примеров расчета, т.е. выражения изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в концевых сечениях стержней с различными граничными условиями их закрепления от соответствующих единичных перемещений, приведены в табл. 4.2.

Численные значения специальных функций <р, (г = 1, 2, 3, 4, 7, 8), входящих в выражение изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в концевых сечениях стержней, приведены в таблице 4.1.

4.6. Устойчивость рам при действии узловых нагрузок. Метод перемещений

Предположим, что все элементы заданной системы изначально имеют прямолинейную форму и сопряжены между собой под прямым углом. В данном случае при действии узловых нагрузок начальная форма равновесного состояния *системы соответствует ао-*критической стадии работы конструкций, в поперечных сечениях элементов системы возникают только продольные силы и они работают либо на сжатие, либо на растяжение.

Как и для обычных стержней, продольными деформациями оси элементов заданной системы пренебрегаем.

Принимая, что рассматриваемая рамная система с произвольным п раз кинематически неопределимой системой (п = 1, 2, 3,...), канонические уравнения метода перемещений для нового равновесного, т.е. критического состояния, как и в классическом методе перемещений записывается в форме

$$
\begin{aligned}
&\Gamma\backslash\backslash Z\backslash + r_n \; Z_2+\text{-}+r_{ln} \; Z_{,,}+R_{lP}= 0;\\
&r_{2l} \; Z_x + r_{22} \; Z_2+\text{--}+r_{2n} \; Z_n +R_{1P} = 0;\\
&Tnl\ {}^{z}\backslash + {}^{r}n2 \; Z_2+\text{-}+r_{,,,,} \; Z_n + R_{,,}p = 0.
\end{aligned}
\qquad (4.12)
$$

При расчетах на устойчивость система (4.12) преобразуется. Так как мы рассматриваем только случай действия узловых нагрузок, то во введенных связях они никакой реакции не вызывают. То есть в данном случае следует принимать

$$RIP = R_2p = \ldots = R_np — 0.$$

Единичные реакции г,* *(i,k* = 1, 2, 3,..., *n),* как и при расчете обычных статических задач, определяются из условия равновесия узлов или отдельных частей основной системы при заданных единичных смещениях. Как показали результаты решения задач, изложенных в п. 4.5 в узловых сечениях элементов значения моментов и поперечных сил в общем случае являются функциями от параметра внешних продольных сил v. Следовательно, и единичные реактивные усилия во введенных связях в общем случае являются функциями от параметра v и обозначаются /у* (v).

С учетом выше изложенного система (4.12) преобразуется и записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&r_n(v)Z_l+r_{l2}(v)Z_2+\text{-}+r_{l,,}(v)Z_{,,} = 0;\\
&/\bullet_{21}(v)\, Z\backslash + r_{22}\{v)Z_{2+} - +r_{2n}(v)\, Z_{,,} = 0; \qquad \wedge \quad \wedge\\
&r_mi\{v)Z_l+r_{m2}(v)Z_2+\text{-}+r_{mn}(v)Z_n = 0.
\end{aligned}
$$

Так как в новом равновесном (критическом) состоянии, составные элементы искривляются, следовательно, все неизвестные 2/ заведомо не могут быть равны нулю. Поэтому определитель однородной системы алгебраических уравнений (4.13), составленный из коэффициентов при неизвестных, должен быть равен нулю

$$
\begin{matrix}
1i(v) & П2И & - & r_{,,,}(v)\\
/\bullet_{21}(v) & r_{22}(v) & - & r_{2,,}i(v)\\
 & r_{n2}(v) & &
\end{matrix}
= 0. \qquad (4.14)
$$

Раскрыв определитель (4.14) и приравняв его нулю, получим ***трансцендентное*** уравнение ***относительно параметра критической*** нагрузки v. Решив это уравнение относительно v и по минимальному значению корня $v = v_{mj_n}$, определяют критическое значение внешних сил.

4.7. Пример расчета рамы на устойчивость (задача № 12)

Для заданной рамы, изображенной на рис. 4.8, а, предполагая, что $E1p = 2E1_C$; / = 4 м; $E1_C$ = 4000 кН м^2, требуется:

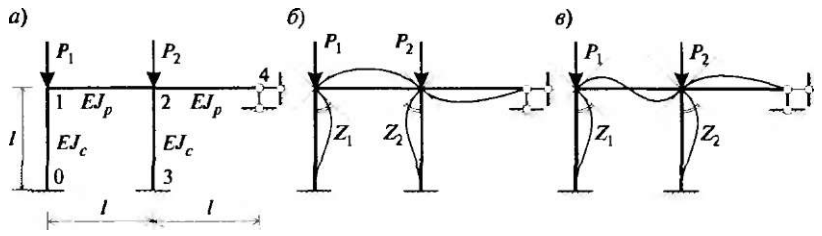


Рис. 4.8

1. Показать возможные формы потери устойчивости рассматриваемой системы.

2. Определить критические значения силы $P\backslash$ и P_2 для случаев:

а) $P_г = F$, $P_2 = 0$; б) $P_x = P_2 = P$, в) $P_x = 0$; $P_г = P$.

Решение

1. Показать возможные формы потери устойчивости рассматриваемой рамы

Рассматриваемая система является дважды кинематически неопределимой. Возможные формы потери устойчивости системы определяются угловыми перемещениями узлов 1 и 2. Следовательно, для установления искривленной формы рамы необходимо определить углы поворотов $Z\backslash$ и Z_2 двух смежных узлов 1 и 2.

В критическом состоянии возможные формы потери устойчивости изображены на рис. 4.8, *б*, *в*.

2. Определить критические значения силы $P\backslash$ и P_2 для случаев: а) $P_x = P$, $P_2 = 0$; б) $P_x = P_2 = P$, в) $P_x = 0$; $P_2 = P$.

Приступая к решению поставленной задачи, в качестве базовой принимаем стойку 0—1 с изгибной жесткостью E_c = 4000 кНм^2 и длиной / = 4 м.

Вычисляем погонные изгибные жесткости элементов рассматриваемой рамы:

$$'01 = '23 \quad \mathbf{A}\ I\ O\ O\ O\ k\ H - M;$$

$$'12 = '24 = \frac{E1п}{/} \quad \frac{8000}{4} = 2000 \text{ кН-м}.$$

Введем обозначения: /oi = i = 1000 кНм; /$_2$3 $^{=}$'i '12 $^{=}$ '24 $^{=}$ 2 /.

Случай о) $P_x = P$, $P_2 = 0$.

Последовательно задавая перемещения $Z\backslash = 1$, $Z_2 = 1$ и пользуясь табл. 4.2, строим единичные эпюры Л/) и M_2, выражая ординаты эпюры моментов $M\backslash$ и M_2 через величину / (рис. 4.9, о, б).

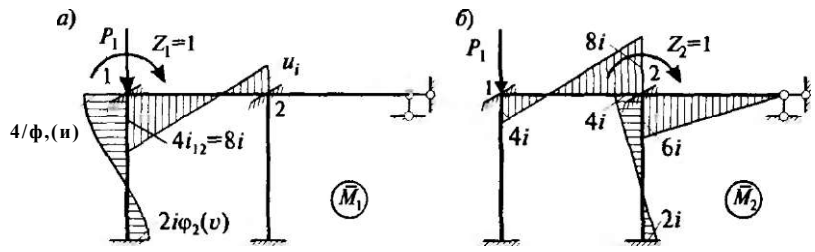


Рис. 4.9

В соответствии с методом сечений вырезаются узлы 1 и 2 (рис. 4.9) и из условий их равновесия определяются выражения реактивных моментов

$$>il(v) = 4'(<Pi(v) + 2); \quad r_{12}(v) = 4i; \quad r_{22}(v) = 18i.$$

Уравнение устойчивости (4.14) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 1i(v) & 1_2(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда } r_n(v)\, r_{12}(v) - r_{12}(v)^2 = 0,$$

или $72\,i^2\,[_{\Phi 1}(y) + 2] - 16\,i^2 = 0$.

Из решения последнего уравнения получим

$$cpi(v) = | - 2 = -1.7777.$$

Применяя принцип линейного интерполирования, с помощью табл. 4.1 вычисляем значение параметра

$$^{z}kp \quad 5.6 + J\frac{[_{\phi 1}(y) - _{\phi 1}(5.6)1.(5.8-5.6)}{_{\phi 1}(5.8) - _{\phi 1}(5.6)} \quad \frac{(-L7777 + L7481) \cdot (5.8 - 5.6)}{-27777 + L7481}$$

$= 5.6 + 0.006 = 5.606.$

Критическая сила $P_{Xкр}$ будет

$$1,кр \quad \frac{vlpEJg}{l^2} \qquad \frac{5.606^2 \cdot 4000}{л2} = 7856.1 \text{ кН}.$$

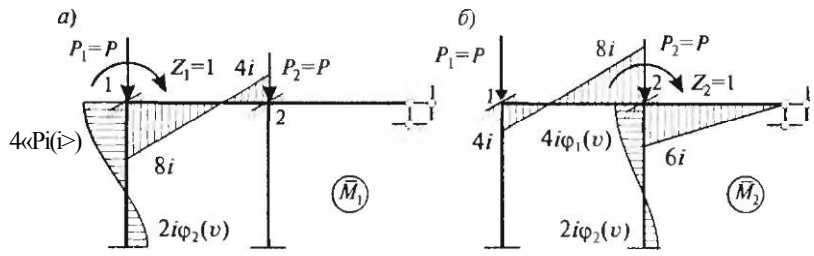


Рис. 4.10

Случай *б)* $P\backslash = P_2 = P$.

Эпюры моментов $M\backslash$ и M_2 в данном случае принимают вид (рис. 4.10).

В соответствии с методом сечений вырезаются узлы 1 и 2 (рис. 4.10) и из условий их равновесия определяются выражения реактивных моментов *гцс* $(i,k = 1,2)$:

$$r_{11}(y) = 4/\{_{\phi 1}(y)_{+} 2); \quad r_{12}(v) = 4i; \quad r_{22}(v) = 2/\{2_{\phi 1}(y) + 7).$$

Подставляя выражения *г% (i, k* = 1, 2) в (4.14), получим

$$<P?(v) + ycpi(v) + 6 = 0.$$

Из решения последнего уравнения получим

$$Ф1(1,2)M = \quad \text{или} \quad Vi(i)(^v) = -L5; \quad 4>!(2)(v) = -4.$$

Применяя принцип линейного интерполирования, по заданным значениям cpi(v) (табл. 4.1) определяем минимальное значение параметра критической нагрузки:

$$v^{тм^n} = 5.4 + -\frac{(<Pl(v)-<Pl(5\text{-}4)\}\ (5.6\text{-}5.4)}{_{\Phi 1}(5.6)-_{\Phi 1}(5.4)}$$

$$= 5.4 + \frac{(-1.5000+ 1\text{-}1563)\ (5.6\text{-}5.4)}{-1.7481 + 1.1563} = 5.4 + 0.115 = 5.515.$$

Следовательно,

$$P\backslash,кр \text{ - } ,кр \frac{[<\Gamma)^{2}\wedge_{C}}{I^{1}} \quad 5.515^{2} \quad 4000 = 7604 \text{ кН}.$$

Случай *в) Pi* = 0; $P_2 = P$.

В этом случае эпюры моментов $M\backslash$ и M_2 имеют вид, изображенный на рис. 4.11.

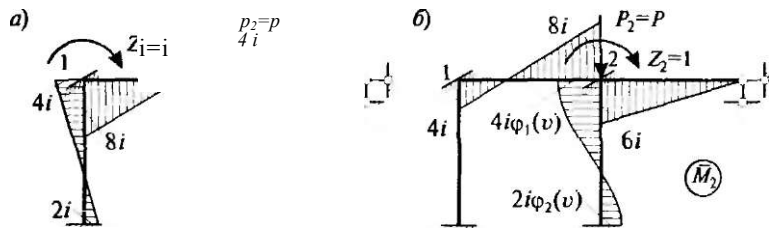


Рис. 4.11

Выражения реактивных моментов в данном случае имеют вид

$$r_{i1}(^{v}) = 12/; \quad r_{12}(v) = 4/; \quad r_{22}(v) = 2/\{2_{\Phi 1}(y)_{+}1).$$

Из уравнений устойчивости получим

$$24/^{2}[2\phi_1(y) + 7]-1б/^{2} = 0.$$

Из решения последнего уравнения получим $9i(^{v}) = -19/6 = 3.1667$. Из табл. 4.1, применяя принцип линейной интерполяции, вычисляем значение параметра v:

$$v_{кр} = 5.8 \; ' \; \frac{(3.1667\text{-}27777) \quad (6.0\text{-}5.8)}{5.1589\text{-}2.7777} - 5.8 + 0.033 = 5.833.$$

Критическая сила $P_{2>Kp}$ будет

$$h \quad кр - \frac{v_{Kp}^{EJ}c}{/'} \quad \frac{5.833^{2} \cdot 4000}{V} = 8505.9 \text{ кН}$$

Обобщая результаты расчетов величин критических сил в зависимости от вида нагружения рамы, имеем

о) $Pг = 0$; $Pxjcp = 7856.1$ кН;

б) $P\backslash,кр = Pцср = 7604$ кН;

в) $P, = 0$; P_2,кр = 8505.9 кН.

Откуда следует, что при = P_2 критическое значение силы $P_{кр}$ меньше наименьшего значения критической силы в случае, если на систему действовала бы приложенная только одна из сил P\ или P_2, т.е. 7604 кН < 7856.1 кН.

Резюмируя, заметим, что как это показывают результаты расчетов, наступление критического состояния системы зависит как от свойств заданной системы, так и от схемы нагружения.

В рассматриваемом примере, как это следовало бы ожидать, наивыгоднейшей схемой нагружения является схема б), т.е. когда одновременно в каждом из двух узлов заданной системы приложены одинаковые силы.

Далее, сравнивая случаи нагружения а) и в), легко установить, что из этих двух случаев нагружения, случай а) является более опасным для заданной системы, т.к. в этом случае потеря устойчивости наступает при более низком уровне величины внешней силы.

Данное обстоятельство объясняется тем, что жесткость узла под номером 1 заданной системы меньше, по сравнению с жесткостью узла под номером 2, т.к. жесткость первого узла формируется двумя элементами (стойки и одного ригеля), а жесткость второго узла формируется тремя элементами (идентичной стойкой, левым ригелем, который является общим для формирования жесткости первого и второго узлов, а также правым ригелем).

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение свойства заданной системы, называемого устойчивостью.
2. Дайте определение положения системы, называемого устойчивым.
3. Дайте определение понятия об устойчивой форме равновесного состояния системы.
4. Дайте определение о критическом состоянии системы.
5. Какие значения внешних сил называются критическими?
6. Что означает потеря системой устойчивости по I и по II роду соответственно?
7. Перечислите все три критерия по определению критических значений внешних сил.
8. Сформулируйте основные задачи теории устойчивости.
9. Сформулируйте задачу Эйлера.
10. Укажите основные закономерности, существующие между различными формами потери устойчивости стержневых систем.
11. Перечислите основные факторы, оказывающие наиболее существенное влияние на величину критических значений внешних сил.

ГЛАВА 5

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

S.I. Предмет и задачи динамики сооружений

Динамика сооружений — это один из специальных разделов строительной механики, посвященный методам расчета сооружений на динамические нагрузки. *Динамические нагрузки* по своей природе весьма разнообразны. К такого рода воздействиям относятся природные явления, т.е. *сейсмические толчки, ветровые порывы,* а также различные *динамические воздействия технологического* или *аварийного происхождения:* движение неуравновешенных частей машин и механизмов; падение летящего тела при соударение его с элементами конструкций; работа копров, молотов и других ударных механизмов; движение поездов, кранов и т.д.

Особенностью динамических нагрузок является то, что при их действии сооружение переходит в состояние движения, причем при периодическом повторении динамических воздействий в определенных условиях происходит накопление энергии системы, выражающееся в постепенном увеличении *амплитуды колебаний.*

Это явление, называемое *резонансом,* особенно опасно для сооружения тем, что разрушение может произойти и при воздействиях с малой интенсивностью.

Существенным отличием динамических методов расчета от статических является введение в уравнениях состояния нового переменного — времени и, ввиду их значительности, инерционных сил. При этом, если при решении аналогичных задач при статическом нагружении, уравнения состояния выражались при помощи алгебраических или трансцендентных уравнений, то соответствующая динамическая задача требует уже решения дифференциальных уравнений с производными по времени.

В динамике сооружений следует различать два типа движения или колебания системы. Колебания системы при отсутствии действия внешних сил называются *свободными.* Если колебания системы сопровождаются действием внешних динамических нагрузок, то колебания называются *вынужденными.*

Для описания динамических колебаний необходимо ввести в рассмотрение следующие понятия: *круговая частота* со и *пе-*

риод колебаний $T = \frac{}{\omega}$. Круговая частота определяет число циклов колебания в течении *2л* секунд, а период определяет интервал времени, в течении которого совершается полный цикл колебаний.

Системы в динамике сооружений различаются по числу степеней свободы. *Числом степеней свободы системы* называется число независимых геометрических параметров (обобщенных координат), определяющих положение системы (материальных точек) в любой момент времени при ее (их) движении. Число степеней свободы системы складывается из числа степеней свободы материальных точек, принадлежащих системе. Число степеней свободы является основной характеристикой системы при динамических воздействиях.

В динамике сооружений различают два основных подхода: кинетостатический и энергетический.

Кинетостатический подход состоит в том, что сооружение в произвольный момент времени предполагается находящимся в равновесном состоянии под действием заданных динамических и вызванных ими инерционных нагрузок. Далее для составления уравнений состояния применяются классические методы строительной механики (метод сил, перемещений или *смешанный).*

Энергетический подход основан в определении в равновесном состоянии через закон сохранения энергии с учетом инерционных сил. В частности, когда силы сопротивления движению не учитываются, энергетический принцип в общем случае записывается в виде:

$$K + V = \text{const},$$

где К — кинетическая энергия системы; V— потенциальная энергии системы или работа внешних или внутренних сил, так как система в процессе колебания находится в равновесном состоянии.

В настоящей книге при решении конкретных задач ограничимся применением кинетостатического подхода, а для вывода уравнения — метода сил.

5.2. Системы с одной степенью свободы

Рассмотрим систему в виде невесомой балки с сосредоточенной массой ***m,*** горизонтальным перемещением и поворотом которого будем пренебрегать. При таких предпосылках единственная материальная точка, т.е. сосредоточенная масса величиной ***m,*** может со-

вершать перемещения только в вертикальном направлении, следовательно, система имеет одну степень свободы.

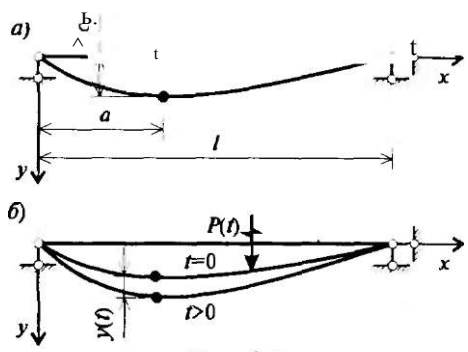


Рис. 5.1

Будем исследовать движение системы из ее исходного положения равновесия при /= О (рис. 5.1, *а),* считая перемещение вниз положительным.

Пусть на балку действует динамическая сила величиной: *P(f) = P_a* sinG/, где б — частота вынуждающей силы. Обозначая дополнительное перемещение массы m от динамических нагрузок через y(f), вводим следующие начальные условия:

$$\text{><o)} = л\ ; \quad Щ = Уо- \tag{5.1}$$

В процессе движения на массу действует *сила инерции l{t) = -my(t*) и *сила сопротивления по Фойхту* 5(f) =-a j/(f). Сила сопротивления движению возникает от различных внешних и внутренних причин: сопротивление движению внешней среды, трение в местах соединения элементов и опорных частях, внутреннее неупругое сопротивление материалов конструкций и т.д.

Заметим, что система, обладающая свойствами внутреннего сопротивления, называется *консервативной,* а система, лишенная данного свойства — *неконсервативной.*

Вводим следующие обозначения: 5ц — вертикальное перемещение балки в точке закрепления массы т от действия вертикальной единичной силы Р= 1, приложенной в той же точке; Л]/>(/) — вертикальное перемещение балки в точке закрепления массы т от динамической силы *P(f),* при этом: *A\p(f) = S\p P(t); 8\p*— вертикальное перемещение балки в точке закрепления массы от действия вертикальной единичной силы Р= 1, приложенной в точке приложения внешней силы *P(f)* при ее отсутствии.

Применяя *метод суперпозиции,* очевидно, что в произвольный момент времени полное перемещение сосредоточенной массы т принимает значение

$$y\{t) = [l\{t) + S(t)]\&_n + P\{t)\&_{lP}, \tag{5.2}$$

откуда и определяется дифференциальное уравнение движения рассматриваемой системы

+ + = (5-3)

Принимаем обозначения: со о = • $\frac{*}{V^s n}$ т — круговая частота собственных колебаний системы; п = $\frac{}{2\ т}$ коэффициент затухания.

С учетом введенных обозначений, уравнение движения системы (5.3) принимает вид

$$y_{+}\ 2ny + aly = -\hat{}\text{-}P\{t).\qquad (5.4)$$

Решение дифференциального уравнения (5.4), с учетом начальных условий (5.1) и, учитывая, что для реальных конструкций всегда выполняется п <щ , записывается в виде

.2 *t*

ω о

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\textit{УА}\qquad (0q\qquad 1_{вф} = \frac{}{^{ю}0\ .у\text{о}};\quad ш = \qquad (5.6)$$

Круговая частота со называется *круговой частотой собственных колебаний системы с учетом сил затухания.*

Коэффициент затухания колебания определяется по *корректированной гипотезе Фойхта,* позволяющей получить наиболее обоснованные результаты для учета диссипации энергии в системе в процессе колебаний, т.е.:

$$n = \frac{5}{2л}с\ о * \frac{5}{2л}со_0> \qquad (^5\text{-}7)$$

где 8 — называется *логарифмическим декрементом затухания* и определяется через отношения соседних амплитуд колебания, возникающих через промежуток времени Т = —:
ω

$$5 = \ln \frac{}{y(t + T)} \qquad (5.8)$$

Для различных конструкций средние значения 5 приводятся в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Наименование конструкции	5
Стальные мосты	0.17
Железобетонные мосты	0.63
Железобетонные балки	0.56
Железобетонные рамы	0.25
Железобетонные ребристые перекрытия	0.57

Выражение (5.5) определяет перемещение сосредоточенной массы при действии силы ***P{t),*** изменяющейся во времени по произвольному закону. Первый член выражения характеризует собственные колебания системы, а второй, интегральный член — вынужденные колебания.

Так как ***P{t)*** = ***Pq*** sin6/, то решение (5.5) преобразуется и принимает вид:

$$У = У A \qquad \sin(ш / + ф) + y_a \sin(at - ф^{\wedge}. \qquad (5.9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$Уа = Б|рО>кд| \; № \qquad {}^{к}Л = \frac{|}{\text{e i l}^2 + 4«^2 e^2} \qquad (^{510}>$$

$$\text{co}^2 J \qquad ш^4$$

$$\mathbf{1}$$

Если в момент времени ***t*** = 0 система находится в состоянии покоя, т.е. Уо = Уо = 0, то решение (5.9) с учетом (5.10) преобразуется в виде

$$У = кдРо \; ъ|_Р \sin(ft)/ - ф\text{O}.$$

Величина ***кд*** называется *коэффициентом динамичности* и характеризует эффект от динамической нагрузки по отношению к аналогичной статической нагрузке величиной ***P(t)*** = ***Pq*** = const.

Коэффициент динамичности существенно зависит от отношения 6/ш . При 0/со —> 1 коэффициент динамичности стремится принять максимальное значение и колебания системы при 6/ш = 1 называло

ются *резонансными,* а амплитуда колебаний принимает опасное значение:

$$Уа = кд\ Ъ|р\ Pq = \frac{со^2}{— - 8 | р\ P_0} \bullet$$

5.3. Пример расчета балки в виде системы с одной степенью свободы (задача № 13)

Проверить прочность балки в рабочем режиме вибратора, расположенного по середине пролета балки (рис. 5.2, *а),* учитывая только вертикальную составляющую вертикальной силы ***P(f) = Pq*** sin6/; принимая: G= 15 кН — вес вибратора; P***q***= $P_а$ = 3.0 кН — вес неуравновешенных частей вибратора; е = 0.01 м — эксцентриситет относительно оси вращения неуравновешенных частей; 6 = = 30 $с^1$ — круговая частота внешней силы; / = 4 м — пролет балки. Поперечное сечение балки выполнено из двутавра №20, материал Ст-3. Следовательно, Е = 2.1-10^8 кН/$м^2$ — — модуль деформации материалов; $j_х$= ***тю***^$м^4$ — момент инерции; $W_х$ = 1.84-$10^{"4}$ $м^3$ — момент сопротивления поперечного сечения; ***R*** = 25-10^4 кН/$м^2$ — расчетное сопротивление; 5 = 0.1 —логарифмический декремент. Интенсивность распределенных нагрузок принимается равной: *q* = 4 кН/м.

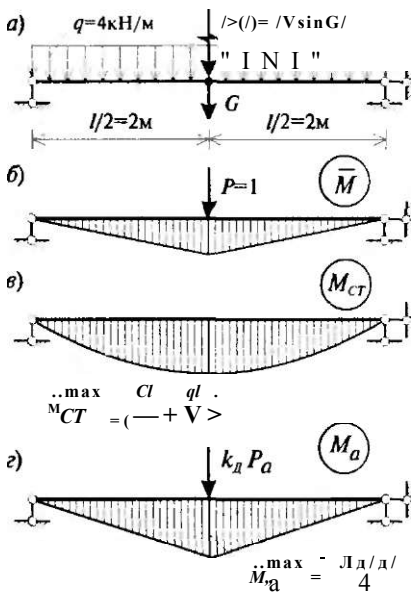


Рис. 5.2

На первом этапе для выполнения расчетов необходимо определить величину коэффициента динамичности. Для этого сначала определим величину коэффициента затухания п = со =1.6-10~^{2} to.

0,28

Воспользуемся эпюрой моментов, изображенной на рис. 5.2, б, и по формуле Мора определим 5) 1

$$5_{\text{ц}} \quad \frac{1}{E} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{4} = \frac{1}{48EJ'}$$

Круговая частота собственных колебаний без учета затуханий

$$C0_0 = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{l^3}{48EJ}} \cdot \dfrac{1}{GI_{\text{кр}}}}{\dfrac{(48 \cdot 2.1 \cdot 10^8 \cdot 1.84 \cdot 10^{-5} \cdot 9.81}{15 \cdot 4^3}} = 43.54 \text{ с}^{-1}.$$

Собственная частота системы с учетом затухания колебания принимает значения

$$\text{ю} = \sqrt{43.54^2 - \left(\frac{6.28}{43.54^2}\right)^2} = 43.54 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6L28}\right)^2} = 43.2 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент динамичности определяется из (5.10) по формуле

$$\kappa_{\text{д}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{30^2}{43.2^2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 1.6^2 \cdot 10^{-4} \cdot 43.2^2 \cdot 30^2}{43.2^4}}} = 1.93.$$

$$\sqrt{(1 - 0.4823)^2 + 4.94 \cdot 10^{-4}}$$

Последовательно определим максимальное значение момента в опасном сечении (рис. 5.2, *в, г)* от статических и динамических сил:

$$M_{\text{кр}}^{\text{д}} = M_{\text{кр}}^{\text{с}} \cdot k_{\text{д}} = \frac{4}{g} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{4}{9.81} \cdot 30 \cdot 2.001 \cdot \frac{8}{4} = 5.32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Максимальное напряжение в опасном сечении принимает значение:

$$\sigma = \frac{M_x^{\text{г}} + M_x^{\text{д}}}{W_x} = \frac{23 + 5.32}{1.84 \cdot 10^{-4}} = 15{,}39 \cdot 10^4 < R = 25 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2,$$

т.е. прочность конструкций обеспечена.

5.4. Свободные колебания системы с произвольным числом степеней свободы

Рассмотрим свободные колебания системы с конечным числом степеней свободы. В качестве объекта рассмотрим упругую невесомую балку, изображенную на рис. 5.3 и с и сосредоточенными массами /И], ***m₂, Щ,..., m„.*** Пренебрегаем продольными деформациями оси балки в процессе колебаний. При этом положение системы однозначно определяется перемещениями сосредоточенных масс У/ (0 0 = 1> 2, 3,..., п) в произвольные моменты времени /, вызванными упругими деформациями балки в поперечном направлении.

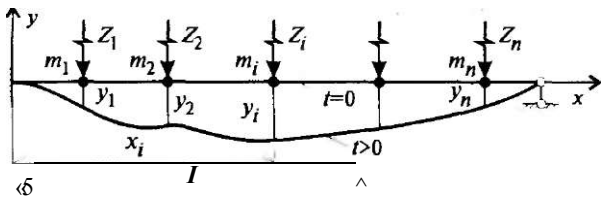


Рис. 5.3

Во время движения, пренебрегая сопротивлением внутренних и внешних сил, на балку будут действовать в качестве внешних сил инерционные силы = ***-ftl₁*** , (/= 1, 2, 3,..., и). Применяя метод сил, перемещение произвольной массы ***y,-*** (***t***) записывается в виде суммы

$$-tb_{ik}Z_{ik}(t), \qquad (5.11)$$
$$i=1$$

где b_{ik} — перемещение /-й массы от статической единичной силы, приложенной к ***к***-й массе от статической единичной силы по направлению соответствующей инерционной силы.

Подставляя выражение инерционных сил в систему уравнений (5.11), получим:

$$У1(t) + \sum_{/=1} 8_{ik}\, m_к\, y_к(t) = o, \quad a = 1, 2, 3,..., n). \qquad (5.12)$$

Система дифференциальных уравнений движения (5.12), описывающая свободные колебания заданной балки, представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которой в общем случае записывается в виде

$$\text{л}\,O) = \sum_{r=1} y_{ir}\{t) = t\ y\ l\ ^{\phi}\text{г}\{'\text{)-} \qquad (5.13)$$

Рассмотрим одно частное произвольное решение соответствующее г-й форме колебаний

$$\text{У/г}(0 => \pounds(')<\text{M}')- \qquad (514)$$

Подставляя (5.14) в (5.12) получим

$$^{\wedge}\text{T T} = \frac{\Phi M)\ _____ y^{\circ} _____}{^{\Phi}\ '\ \text{«}\ \ \sum_{\kappa=1} T\ I\ .\ T\ .\ Л} = \qquad (5.15)$$

которое распадается на две группы уравнений

$$\Phi_{\text{г}}(/) + \text{ю}5\Phi,(/) = 0 \qquad (5.16)$$

$$(\text{«}1\ ^{5}11 \quad - 1)^{\wedge}\text{"} \ + {}^{m}2\ \text{Sl2} \quad y_{2\text{г}}\ ^{+} - + {}^{m}n\ h_{n} \quad = 0;$$

$$\text{«}1\ ^{5}21 \quad \text{Л} + (\text{«}2\ ^{5}22 \quad - 1)^{\wedge}2\text{r}\ ^{+} - \ ^{+}\ {}^{m}n\ {}^{\text{ъ}}1n < 4\ y_{n\text{г}} = 0; \qquad (5.17)$$

$$^{\text{и}}1\ ^{5}\text{«}1 < 4 \quad + {}^{\text{и}}2\ \text{S«2}\ \text{©J} \quad ^{+}\ \text{••}\ ^{+}\ (^{\text{т}}\text{п}\ ^{5}/\text{w} \quad - \quad = 0.$$

Решение уравнения (5.16) записывается в виде

$$\Phi(/) = A_{\text{г}}\ \text{sina}>_{\text{г}}? + B_{\text{г}}\ \text{ca\&}(a_{\text{г}}t,\ (\text{г} = 1,\ 2,\ 3,...,\text{«}). \qquad (5.18)$$

Как видно из (5.18), по произвольной форме г= 1, 2, 3,..., п колебания происходят по гармоническому закону с частотой $\text{со}_{\text{г}}$. Здесь $\text{со}_{\text{г}}$ — частота собственных колебаний заданной системы, соответствующая г-й форме.

Согласно (5.14), у-), является перемещением і-й массы при г-ой форме колебания, значения которой определяются из решения системы алгебраических уравнений (5.17).

Система (5.17) относительно $\text{Ур}_{\text{г}}0^{=}$ 1, 2, 3,..., п) имеет различные решения. Очевидно, решение $\text{ур}_{\text{г}} = 0$ свидетельствует об отсутствии движения системы, т.е. состояние покоя системы, которое нас не интересует.

Система (5.17) может иметь решения, отличные от нулевого лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю, т.е. когда выполняется условие

$$\begin{vmatrix} m_n & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0, \qquad (5.19)$$

где принято обозначение $\lambda_r = 1/\omega_r^2$.

Раскрывая определитель (5.19), получаем уравнения п-й степени относительно λ_r, а при его решении *получим n* значений λ_r. Каждому значению λ_r (r= 1, 2, 3,..., и) будет соответствовать своя собственная частота

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}$$

и свой собственный вектор

При этом собственные формы упругих систем ортогональны между собой

$$\sum_{i=1} m_i y_{ir} y_{ik} = 0 \quad (r, k = 1, 2, 3,..., и; \quad r \neq k). \qquad (5.20)$$

Величины непосредственно из решения (5.17) определить нельзя, они могут быть найдены с точностью до произвольного постоянного множителя, т.е. по существу могут быть найдены отношения между $y_1, y_{2r}, \ldots, y_{nr}$. Принимая обозначения $p_r = \frac{y_r}{y_1}$ система (5.17) преобразуется в вид:

$$\begin{aligned} &(\delta_{11} - \tfrac{1}{\omega^2}) p_r + \delta_{12} m_2 p_r + \cdots + \delta_{1n} m_n p_r = 0; \\ &\delta_{21} m_1 + (\delta_{22} - \tfrac{1}{\omega^2}) m_2 p_r + \cdots + \delta_{2n} m_n p_r = 0; \\ &\cdots \\ &\delta_{n1} m_1 + \delta_{n2} m_2 p_r + \cdots + (\delta_{nn} - \tfrac{1}{\omega^2}) m_n p_r = 0. \end{aligned}$$

Последняя система имеет одно лишнее уравнение, так как имеем п уравнений относительно **(л-1)** неизвестных $p_{2г}$, $рз_г$,..., $р_{„г}$. Отбрасывая одно из этих уравнений, решая оставшуюся систему определяют все неизвестные $p_{2г}$, Рзг, Риг-

Далее, полагая $p_{1г}$= 1, по формуле =p_{ir} определяются все остальные амплитуды перемещений масс при г-й произвольной форме колебаний.

Возвращаясь к выражению (5.13) с учетом (5.18) можем записать

$$Л\ (0\ ^{e}\ \sum_{r=1}^{n} \mathbf{X}\mathbf{p},> \mathit{Ylz}\ (Л\ sin\ a_r t+B_r\ cos(o_r t). \qquad (5.21)$$

Учитывая, что $y_{Xг}$, $A_г$ и $B_г$ являются произвольными постоянными, решение (5.21) можно записать в более удобной форме

$$\mathit{YlW}\ ^{=}\ \sum_{r=1} ZP\mathit{ir}\ _{V}(K\ ^{s}i^{n}\ (a_r t+B^{*}\ \cos co_r\ f],$$

где A^{*}_r и B^{*} можно выразить через начальные условия каждой массы при t= 0, которыми являются перемещения /-й массы $y,(0)$ и ее скорости $y_t(0)$, и следовательно, задача о свободных колебаниях системы с произвольным числом свободы будет полностью решена.

5.5. Вынужденные колебания систем с произвольным числом степеней свободы при действии вибрационной нагрузки

Рассматриваем *установившиеся* вынужденные колебания системы (рис. 5.4) без учета внешнего или внутреннего сопротивления. Будем считать, что внешнюю нагрузку можно разложить по направлениям перемещений сосредоточенных масс, а составляющие ее обозначим Pj(t) = P-* sin ©t, (z = 1, 2, 3,..., n).

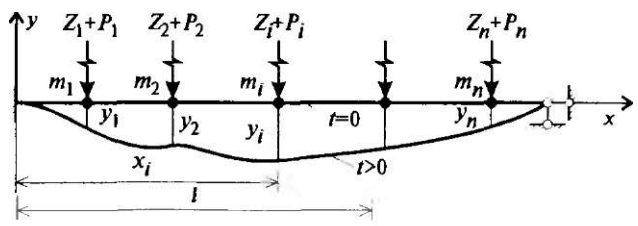


Рис. 5.4

Таким образом, роль внешних сил здесь будут играть величины

$$= \qquad (5.22)$$

Канонические уравнения метода сил в данном случае записываются в виде

$$y, = \sum_{\Gamma=1} u- M^*)> \qquad {}^{1,\ 2>\ 3,\ldots,\ n)\bullet} \qquad {}^{(5\,,23>}$$

Подставляя (5.22) в (5.23) и после ряда преобразований, получим

$$Л\,W^{+}\ \underset{ЛН}{\overset{5}{\text{й}}}\ Щ\ y_k\{t) = A,\ \sin ©t,\quad (z = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ л). \qquad (5.24)$$

Здесь $Aj = \sum_{к=1} X\,\hat{}ik$ ~ амплитудное значение перемещения 1-й массы, вызванное действием системы внешних сил Pj (0-

Частное решение системы уравнений (5.24) записывается в виде

$$yt\{f)= \ jfsinef, \qquad (5.25)$$

где у-' — амплитуда перемещения 1-й массы; © — частота вынужденных колебаний системы.

Выражение для определения инерционных сил принимает вид:

$$Z,\ (0= \ \sim Щ\ j>,(f)\ -\ Щ\ в^2\ y^\circ \sin ©t = Z,^\circ \sin ©t, \qquad (5.26)$$

где $Z,^\circ = m_t\ ©^2$ амплитудные величины инерционных сил.

Принимая обозначение

$$\frac{e^{z}}{m_к} \qquad (5\text{-}27)$$

и с учетом (5.26) систему уравнений можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} &6l!\ Zi^0 \quad +6_{12}Z_2{}^\circ{}_+ \quad - \quad +6_{1w}Z^\circ \quad = Ai;\\ &6_{21}Zi^\circ \quad +6_{22}\ Z_2{}^\circ{}+ \quad - \quad +6_{2,,}Z^\circ \quad =Л_2;\\ &8_{,,}i^{\wedge 0} \qquad 6_{w2}Z_2 \qquad \bullet\bullet\bullet \qquad 6^*{}_{,,}Z^\circ \quad =A_W, \end{aligned} \qquad (5.28)$$

решение которого записывается в виде

$$z_i = \backslash^{D}_{i!} \qquad 4 \tag{5.29}$$

Здесь D и Dj — соответственно, определитель системы (5.28) и определитель, полученный из $\boldsymbol{D}$ заменой элементов $(\kappa = 1, 2, ...,$ и) соответствующими свободными членами Л- (/ = 1, 2,..., и), т.е.

$$D_{,} = \begin{vmatrix} 8ll & 6_{12} & \cdot" & {}^{6}1л \\ 6_2i & 6_{22} & \cdot & {}^{6}2л \\ & & & \\ {}^{8}и1 & {}^{6}л2 & " & {}^{ъ}nn \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 6li & 6_{12} & \cdot & {}^{6}1,М & б_{Ю+1} & {}^{6}1и \\ 6_2i & 6_{22} & \cdot & {}^{6}2,/-1 & & {}^{6}2и \\ & & & & & \\ {}^{6}л1 & {}^{6}л2 & \cdot & {}^{6}л,/-1 & & \end{vmatrix} \tag{5.30}$$

Нетрудно заметить, что определитель $\boldsymbol{D}$ совпадает по форме с выражением (5.19), и поэтому при 0-»со/, т.е. при стремлении значения частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний заданной системы, получим $\boldsymbol{D}$ -> 0, следовательно, $\boldsymbol{zf \to \infty}$ и согласно (5.26) yf -> оо , т.е. будет иметь место резонанс.

График зависимости yf от частоты © имеет вид, приведенный на рис. 5.5.

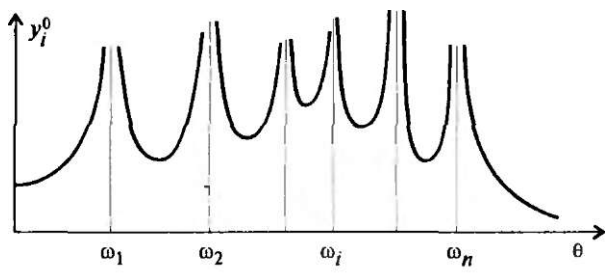


Рис. 5.5

Однако увеличение амплитуды y'' колебаний при резонансе до бесконечности является абстракцией. В действительности всегда имеются контуры, ограничивающие величину амплитуды у®, в

частности внутреннее трение материала конструкции или внешнее сопротивление. Поэтому в действительности при 0-> ω,- происходит значительное увеличение ***yf*** , при этом оставаясь конечной величиной.

После определения Zf из (5.29) с учетом (5.22) следует определить амплитудное значение внешних сил:

$$R\ ?\ =\ PJ^{0}\ -\ Z\ F\ ,\ (/ = 1,2,\ldots,\ л), \qquad (5.31)$$

и по значениям Л® (/ = 1, 2,..., п) определить амплитудное значение внутренних усилий.

Например, общее выражение для определения амплитудных значений изгибающих моментов от динамических сил ***Rj{f)*** для статически неопределимых систем можно записать в виде

$$А/,^{0} = Л/,, \quad + Л/,_{2}\ 4_{+}\ldots_{+}M_{ik}\ R^{0}_{k}\ ,$$

где ***(к,*** / = 1, 2,..., ***п)*** — значение момента в ***1-м*** сечении при действии единичной силы = 1 в точке ***к.***

5.6. Пример динамического расчета рамы (задача № 14)

На раме с размерами, указанными на рис. 5.6, в точках 1 и 2 установлены два одинаковых вибратора весом ***G*** = 20 кН каждый и весом неуравновешенных частей =1.2 кН, размещенные на оси вращения с эксцентриситетом е = 0.015 м. Вибраторы вращаются синфазно с частотой п = 600 об/мин.

Рама выполнена из двух двутавров № 50 (ГОСТ 8239-72), т.е. J_x = 3.29 Ю-^{4} м^{4}; W_x =0.157-10-^{2} м^{3}. Рама изготовлена из стали с характеристиками ***E*** = 2.1-Ю^{5} МПа, ***R~*** = 190 МПа.

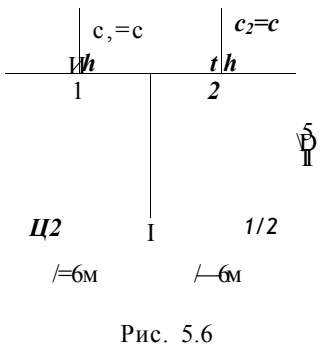


Рис. 5.6

Пренебрегая собственным весом рамы и внутренним трением материала, требуется:

1. Составить канонические уравнения по методу сил, определяющие свободные колебания рамы, и получить значения частот и периодов собственных колебаний рамы.

2. Вычислить отношения амплитуд

и графически изобразить возможные формы собственных колебаний рамы.

3. Проверить ортогональность собственных форм колебаний системы.

4. Определить круговую частоту вынужденных колебаний и изобразить примерный вид графика коэффициента динамичности.

5. Составить канонические уравнения по методу сил, определяющие вынужденные колебания системы, и определить амплитудные значения инерционных сил.

6. Построить статическую эпюру изгибающих моментов от всех вибраторов и эпюру амплитудных значений изгибающих моментов при вынужденном режиме колебания рамы.

7. Построить эпюру моментов при одновременном действии статических и динамических сил и определить положение опасного сечения конструкции.

8. Вычислить максимальное значение напряжения в опасном сечении и проверить условия прочности для принятого поперечного сечения рамы.

Решение

Расчетная схема рассматриваемой системы показана на рис. 5.6. Под действием периодической возмущающей нагрузки рама совершает колебательное движение. Пренебрегая внутренним трением материала рамы и ее собственным весом, упругие перемещения сечений 1 и 2 по принципу независимости действия сил записываются в виде:

$$\begin{aligned} & Z_2(t) \quad + \quad A_{IP}(ty, \\ y_2(t) \;=\; & 5_2 i \;\; Z_y(t) \; + \; 5_{22} \;\; Z_2(t) \; + \; A_{2\ P}(t). \end{aligned} \tag{5.32}$$

где 5цс — перемещение /'-го сечения от статической единичной силы, приложенной в *к-м* сечении (i = 1, 2; *к* = 1, 2) по направлению соответствующей инерционной силы; Aj p, $Д_2$ /> — перемещения сечений 1 и 2 от всех динамических нагрузок. При этом

$$\begin{aligned} & \text{Aj p} = \text{A® p sin0/}; \\ & \text{A}_2\boldsymbol{p} = \text{A® pSin©f}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

где

$$\text{Al,JP} = 5\,\text{ii}\,\text{^}^\circ + 5_{12}/^{\text{J}}{}_2{}^0; \tag{5-34}$$

2,P

С учетом выражений (5.33) и (5.34) и /и, = m_2 = m уравнение (5.32) в стационарном режиме колебаний можно переписать в виде

$$[5_{21}Z_1^{\circ}+(5_{22}-x)/'_2{}^{0}+A_{2\cdot/}=0, \qquad (5\ 5>$$

где $X = \frac{1}{т\,®^2}$

Решая систему уравнений (5.35), определяют амплитудные значения инерционных нагрузок (способом Крамера/.

$$Zf — Dj/D, \quad (/=1,2), \qquad (5.36)$$

где приняты следующие обозначения:

$$D = 81,8_{22} - 8_{,2}; \quad Di = 8_{,2}A°_{2P} - 8_{22}Д_{,P},$$

$$D_2 = 8_{21}Д°p-81_{,}Д_2p;$$

$$5_{22} = 5_{22} - ^{\wedge}.$$

Учитывая, что в данном случае $P\backslash = P_2$, амплитуды динамического прогиба и изгибающего момента в произвольном /-м (/ = 1, 2,...) сечении могут быть определены по формулам

$$Af = UZ?_{+}P°)_{+}UZ^{\wedge}P^{0}) - , \qquad (5\ 37)$$

$$Mf-M_{iy}(zUP«yM_{i2}(z^{*}{}_{2+}p«\backslash$$

Уравнения движения (5.32) при свободных колебаниях рамы, т.е. при $P\backslash = P_2 = 0$, принимают вид

$$U(o = 5_{n}z,(o_{+}8,_{2}z_{2}(o;$$

$$\backslash y_2(t) = b_2yZy(t) + b_{22}Z_2(t).$$

Относительно амплитуды перемещения последняя система уравнений преобразуется в виде

$$У? + S,_2 y_2 = 0; \qquad (5\ 39)$$

$$|5_{21}y,^{0}_{+}5^{*}_{22}У2^{0} = 0,$$

где $5,1 = 5,, - X$; $5_{22} = 5_{22} - X$; $X = \frac{}{т\ со^2}$

Здесь со — частота собственных колебаний рамы.

Система алгебраических уравнений (5.39) относительно амплитуды перемещения сосредоточенных масс имеет различные решения. Очевидное решение = у® = 0 свидетельствует об отсутствии движения системы и не подходит по смыслу поставленной задачи.

Система (5.39) может иметь решения, отличные от нулевого, лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю, т.е. когда выполняется условие

$$/)(«о) = \begin{matrix} 5_n - ?\,i & 5)2 \\ 5_{2}j & 5\,22^{-}X \end{matrix} = 0. \qquad (5.40)$$

Раскрыв определитель (5.40), получим квадратное уравнение относительно X. После определения X с учетом (5.39) вычисляются собственные частоты coi < co_2.

Первая частота coi называется частотой основного тона собственных колебаний. Каждой частоте соответствует определенная форма колебаний системы. Форму колебания можно изобразить графически. Для этого в уравнения (5.39) следует подставить значение ***Xj (i*** = 1, 2), причем

$$Xj = 1//я,- co \bullet. \qquad (5.41)$$

При этом одно из двух уравнений (5.39) становится лишним. Пренебрегая первым уравнением (5.39), из второго получим

$$4 = - \qquad t\,f - l. \qquad 2). \qquad (5\text{-}42)$$
$$\textit{Уи} \qquad {}^{m}\textit{2} \quad 22\ Ю/\ -^{1}$$

После чего, задавая значение *уц* (/ = 1, 2), можно вычислить y_{X2} в долях ≫2₂, а $y_{2}1$ — в долях ≫ц и изобразить графический характер возможной формы колебаний первого и второго тона колебаний.

Формы колебаний должны быть ортогональны. Условие ортогональности собственных форм записывается в виде:

$$\sum_{/=1}^{2\,п} \textbf{ЦЩУ\%У1к} = °. \quad (Л\ л = 1, 2; \quad \textit{г* к).} \qquad (5.43)$$

Определив собственные частоты coj и co_2 и вычислив частоту вынужденных колебаний 0, необходимо сопоставить © с ближайшей из CO] или юг- Во избежание наступления резонансных колебаний рекомендуется, чтобы © отличалась от любой из частот соь а≥2

не менее чем на 30%. Если при решении задачи окажется, что это требование не выполняется, то следует изменить значение со, или 0. Этого можно достичь путем:

— изменения геометрических или физико-механических характеристик материалов элементов рамы;

— уменьшения или увеличения частоты вращения вибратора.

При этом во всех случаях напряжения в опасных сечениях рамы должны удовлетворять условиям прочности.

Переходим к численной реализации решения в соответствии с постановкой задачи.

1. Определение частот и периодов собственных колебаний рассматриваемой системы

Предварительно определим изгибную жесткость элементов заданной системы

$$EJ = 2EJ_X = 2\text{-}2{,}1\text{-}L0^8 \quad 3{,}29 \quad 10"^4 = 13{,}489\text{-}Ю^4 \text{кН м}^2.$$

Заданная система один раз статически неопределима. Основная система метода сил представлена на рис. 5.7, *а.* Эпюра моментов в основной системе от действия силы X\ = 1 показана на рис. 5.7, б, а от единичных внешних сил — на рис. 5.8, *а, б.*

Сначала рассчитываем раму на действие силы P\ = 1. Каноническое уравнение метода сил в данном случае записывается в виде

$$^5 11^1(1) + ^Д 1P, \ ^{=0} - \qquad (5.44)$$

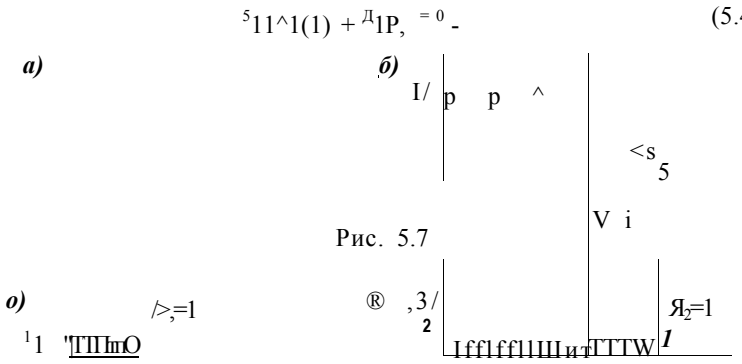


Рис. 5.7

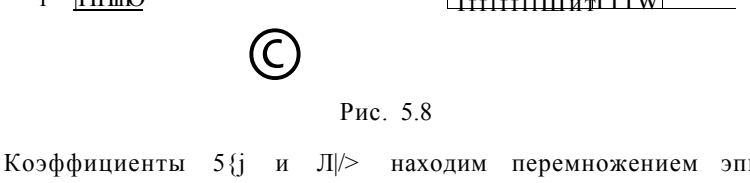


Рис. 5.8

Коэффициенты 5{j и Л|/> находим перемножением эпюр МуиМ'р^ по формуле Мора.

Здесь 5}i определяется как результат перемножения эпюры M\ (рис. 5.7, 6) самой на себя, Aj/> как результат перемножения Л/j (рис. 5.7, *6)* с $M_{\text{п}}$ • (рис. 5.8, *а).*

$$5_{1H} \sim EJ \quad \cdot / \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot / = \frac{3}{3EJ'} \qquad (5.45)$$

$$\sim \sim EJ \; 2 \; V \; 2) \; 2 \; 6 \; / \; 48\,EJ \qquad 51'$$

С учетом (5.45) из решения (5.44) получим

$$\underline{5/^3 \cdot 3EJ} \quad 5$$

Эпюра изгибающих моментов в заданной системе от действия сил ***P***j =1 ***и X]*** = 5/16 изображена на рис. 5.9, ***а.***

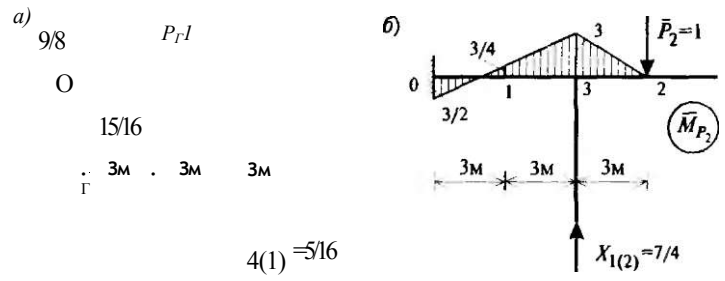


Рис. 5.9

Рассчитываем раму на действие силы *Pj*= 1- Каноническое уравнение метода сил в данном случае принимает вид

$$^5 11 \; ^\wedge 1(2) \; ^{+ Д} 1Я_2 \; = 0 . \qquad (5.46)$$

Здесь Л|р$_2$ определяется как результат перемножения эпюры моментов, изображенных на рис. 5.7, б и 5.8, б, в соответствии с формулой Мора

$$^\wedge \; - \; z \; H \; ' \; - \; ' \; i \; ' \qquad \frac{11^3}{12\,EJ} \qquad (5.47)$$

С учетом значения 8{(из (5.45) и значения Д^ из (5.47) и из (5.46) получим

$$X_W = \frac{7/^3 \cdot 3EJ}{\backslash 2EJ.P} = \frac{7}{4}$$

Эпюра изгибающих моментов от действия сил $P_2 = 1$ и $X\backslash = 7/4$ в заданной системе изображена на рис. 5.9, б.

Единичное перемещение 8ц определяется по формуле Мора в результате перемножения эпюры $M_{P\ell}$ самой на себя, применяя формулы умножения двух эпюр моментов в виде двух трапеций на произвольном участке, приведенная в (2.8). Получим

$$41 \quad \frac{1}{EJ}\left(4 \cdot 2 \cdot \frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8} + 2\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{15}{16} + \frac{9}{8}\cdot\frac{15}{16} + \frac{15}{16}\cdot\frac{15}{16}\right) = \frac{1}{EJ}\cdot 1.969 = \frac{1}{2EJ_X}\cdot 1.969 = \frac{1.969}{13.818\cdot 10^4} = 14.25\ 10^{-6}\ \text{м/кН}.$$

Единичное перемещение ∂_{22} определяется по формуле Мора перемножением эпюры M_{P_2} самой на себя (рис. 5.9, б):

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}\left(2\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{3}{2} + 4\cdot(2\cdot 3\cdot 3)\right)$$

$$\frac{1}{EJ}\cdot 22.5 = \frac{1}{2EJ}\cdot 22.5 = \frac{225}{13.818\cdot 10^4} = 162.83\cdot 10^{-6}\ \text{м/кН}.$$

Единичное перемещение 5i2 определяется по формуле Мора в результате перемножения эпюр M_{P_x} и M_{P_2}, изображенных соответственно на рис. 5.9, а, б:

$$5_{12} = \frac{1}{EJ}\left(2\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{2} - \frac{2}{16}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{16}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{16}\cdot\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{EJ}\cdot 3.375 = \frac{}{2EJ_X}\cdot 3.375 = -24.425\cdot 10^{-6}\ \text{м/кН}.$$

Решив уравнение (5.40), получим

$$\backslash_2 = \frac{(S_{11} + \delta_{22}) \pm \sqrt{(S_{11} + S_{22})^2 - 4(s_{11}S_{22} - \S 12)}}{}$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{177.1\cdot 10^{-6} + 156.4\cdot 10^{-6}}{}$$

Окончательно $\lambda 166.75\cdot 10^{-6}$ м/кН; $= 10.35\cdot 10^{-6}$ м/кН.

По формуле (5.41) определяется значение собственной частоты рассматриваемой рамы

$$= \frac{1}{M\ i\quad \sqrt{GX_x}\quad V}\ \frac{9.81}{20\text{-}166.75\text{-}Ю^{-6}} = 54.24\ \text{cf}^{1};$$

$$(02\quad \frac{1}{\backslash m k_2}\ \frac{1}{\backslash Ь K_2}\ \frac{1}{V\ 20}\ \frac{9.81}{10.35\text{-}Ю^{-6}} = 217.7\ \text{c}^{-1}.$$

Периоды собственных колебаний рассматриваемой системы принимают значения: $T\backslash = 2\text{п/coi} = 0.116$ с; $T_2 = 2\text{л/Ю2} = 0.029$ с.

2. *Определение амплитуды собственных колебаний и графическое изображение собственных форм*

Для вычисления значения отношений амплитуды собственных колебаний из (5.42), предварительно определив т = 20/9.81 » » 2.04 кН-с^2/м, имеем при yfi = 1 и при y_{22}= 1, соответственно

$$\text{o}\ \ У21 \approx\sim \frac{\boldsymbol{m}5_{21}\ \text{и},}{\text{т}\,5_{22}\ \text{со}\,?\ \text{-}\ 1} \sim\sim \frac{2.04 \cdot 24.425 \cdot \text{КГ}^6 \cdot 54.24^2}{2.04 \cdot 162.83 \cdot 1(\text{Г}^6 \cdot 54.24^2\ \text{-}1}$$

$$\frac{0.1412}{0.02275} = -6.201;$$

$$\text{o}\ \ Уп = \sim \frac{\text{mb}_{21}\ \text{со}_2\ \text{-}\ 1}{\text{ТП}\,5_2, \text{со}\,2} \quad \frac{2.04 \cdot 162.83 \cdot 10\ \cdot 217.7^2\ \text{-}\ 1}{2.04 \cdot 24.425 \cdot 10\sim^6 \cdot 217.7^2} \sim \frac{14.74}{2.362}$$

= 6.201.

Формы собственных колебаний рассматриваемой системы изображены на рис. 5.10 *{а* — первая форма; б — вторая форма).

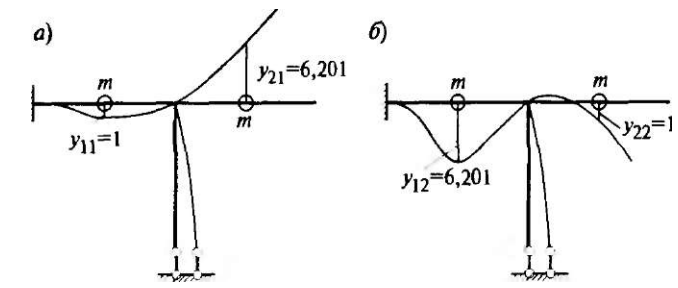


Рис. 5.10

3. Проверка ортогональности собственных форм колебаний

Из условия ортогональности (5.43) имеем:

$$\text{т}(\text{у},^0, \quad + \text{у}^\circ_{2\text{l}}\ \text{y}_2{}^\circ_2) = \text{т}(1.0 \cdot 6.201\ \text{-}\ 1.0 \cdot 6.201) = 0.$$

4. *Определение круговой частоты вынужденных колебаний и изображение примерного вида графика коэффициента динамичности в зависимости от отношения частот вынужденных и собственных колебаний*

В стационарном режиме круговая частота вынужденных колебаний системы имеет значение

$$0 = 2\text{тш}/60 = 6.28\text{-}600/60 = 62.8 \text{ с}^{-1}.$$

Сопоставим величину 0 с величиной ближайшей собственной частоты рамы Ш]

$$\text{Д} = \frac{618 - 598}{\sim 62.8} 100\% = 4.94 < 30\%.$$

Во избежание резонансных колебаний надо изменить величину Ш] или ©. В данном случае, принимая п = 900 об/мин, получим

$$© = 2\text{тш}/60 = 6.28\text{-}900/60 = 94.2 \text{ с}^{1};$$

$$\text{Д} = \frac{}{©} \cdot 100\% = \frac{94.2 - 598}{\sim 94.2} 100\% = 35.52 > 30\%.$$

Следовательно, при © = 94.2 с^{1} принятое условие во избежание резонансных колебаний выполняется.

Примерный вид графика коэффициента динамичности, в зависимости от ©/©!, изображен на рис.5. 11.

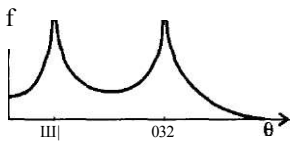


Рис. 5.11

5. *Определение амплитудных значений инерционных сил*

В соответствии с принятым обозначением по формулам (5.34) и (5.35) последовательно определяем:

$$8\text{п} = 5.1 \sqrt{\frac{}{m®^2}} = 14.25\text{-}10\sim^{6} \sqrt{\frac{}{2.04\text{-}94.2^2}} = \text{-}41.00\text{-}i0^{6} \text{м/кН};$$

$$5^{*}22 = 5_{22} \sqrt{\frac{}{m®^2}} \text{"т} = 162.83 \cdot 10\sim^{6} \sqrt{\frac{1}{2.04\text{-}94.2^2}} \sqrt{\frac{}{}} = 107.59\text{-}10\text{"}^{6} \text{ м/кН};$$

$$P_{I}^{\circ} = />_{2}^{0} \frac{}{g} = \frac{}{9.81} 94.2^2 \text{-}1.5\text{-НГ}^2 = 16.28 \text{ кН}.$$

Д"! р = «У$_{п}$ Р? +6$_{12}$ Р$_2$° = 16.28 (14.25- 24.425)- Ю"^{6} =

= -1.66-Ю$^{-4}$ м / кН;

JF2p =#21??$^{+s}$2iP2 = 16.28 (-24.425 +162.83) Ю"^{6} =

= 22.53- 10~^{4}м/кН;

A = &l2 Д°2,р ~ §22 ^{Лo}1,Р = 24.425 • 22.53 +107.59 • 1.66) • Ю"^{10} =

= -3.72 • Ю$^{-8}$ m^2/kH;

D_2 = 5 $_2$i - 5п Д°$_2$ p = (24.425 • 1.66 + 41.00 • 22.53) Ю$^{-10}$ =

= 9,64 • 10~^{8} m^2/kH;

D = $S;,S'_n$= (-41.00-107.59 - 24.425^2) 10"^{12} = -0.5-10~^{8}m^2 /КН.

По (5.33) определяем амплитудные значения инерционных сил

$$|Di/D| = |3.72/0.5| = 7.44 \text{ кН};$$

$$Z_2° = |D2/D| = |9.64/0.5| = 19.28 \text{ кН}.$$

6. *Определение эпюры изгибающих моментов от действия собственного веса вибраторов и амплитудных значений изгибающих моментов при вынужденном стационарном режиме колебания рамы*

Значение изгибающих моментов, возникающих от действия собственного веса вибраторов, в произвольном сечении определяется по формуле

$$M^{c}_{k}{}^{T} = G\,M_{Px} + G\,M_{Pl} = G(M_{Px} + Mp_2).$$

Определяем значение $M^{c}_{к}$ в характерных сечениях (0; 1; 2; 3) рамы (см. рис. 5.9):

сечение 0: M= 20(9/8 - 3/2) = -7.5 кН-м;

сечение 1: 20-(-15/16 + 3/4) = -3.75 кН-м;

сечение 2: M^ = 0;

сечение 3: $M_3^{СГ}$= 20(0 + 3) = 60 кНм.

Эпюра изгибающих моментов M£^{т} приведена на рис. 5.12.

Амплитудные значения изгибающих моментов от действия внешних динамических и инерционных нагрузок в соответствии с (5.37) определяются:

МЦ = M_{Px} (Zj^{0} + P,^{0}) + M_{Pc} (Z$_2$° + />$_2$°) = Mp_2 (7.44 + 16.28) +

+ M$_{P2}$ (19.28 +16.28) = 23.72 Л/^ + 35.56 M$_h$.

Согласно последней формуле $M_{\text{£}}$ *в* характерных *сечениях имеет* следующие значения:

сечение 0:

$$M_0^{\text{д}} = -23.72 \cdot \frac{9}{} - 35.56 \cdot \frac{3}{} = -26.7 \text{ кН м};$$

сечение 1:

$$M_1^{\text{д}} = -23.72 \cdot \frac{}{16} + 35.56 \cdot \frac{}{4} = 4.4 \text{ кН м};$$

сечение 2: $M_2^{\text{д}} = 0$;

сечение 3:

$$M_3^{\text{д}} = 23.72 \cdot 0 + 35.56 \cdot 3 = 107.0 \text{ кНм}.$$

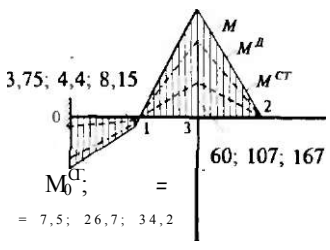


Рис. 5.12

Эпюра Mjf изображена на рис. 5.12 (пунктиром).

7. *Построить эпюру моментов при одновременном действии статических и динамических сил и определить положение опасного сечения конструкции*

Результирующее значение изгибающих моментов, действующих в характерных сечениях при одновременном действии статических и динамических нагрузок, определяется по формуле

$$M_{\text{к}}^{*} = M_{\text{к}}^{\text{ст}} + M_{\text{к}}^{\text{д}}.$$

Эпюра *М*/с, как и *эпюры М"* и , *изображены на рис. 5.12.*

Из рис. 5.12 .согласно эпюре М, следует, что наиболее опасным является сечение 3.

8. *Определение максимального напряжения и проверка условий прочности в наиболее опасном сечении*

$$\ddot{a}_{\text{з}}^{\text{шах}} = \frac{\text{Л/з}}{2\,W_x} = \frac{167}{2 \cdot 0.157 \cdot 10^{-3}} = 53185 \text{ кН/м}^2 = 53.2\text{МПа} < R = 190 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности рассматриваемой рамы обеспечено.

S.7. Сейсмические колебания системы с конечным числом степеней свободы

В теории расчета сооружений на сейсмические воздействия (теория сейсмичности), как и в других областях динамики различных механических систем, обычно применяются расчетные схемы с

распределенными и дискретными параметрами (массами). Система с дискретными параметрами хотя и носит приближенный характер, но более универсальна и можно получить решение для системы любой сложности, вследствие чего наиболее часто применяются в инженерных расчетах.

Для получения динамичных расчетных схем в виде системы с конечным числом степеней свободы, фактическая распределенная масса система концентрируется в определенных местах в виде материальных точек. В итоге получается невесомая система, несущая определенное количество сосредоточенных масс. Число степеней свободы система равно числу независимых геометрических параметров, однозначно определяющих положение сосредоточенных масс в произвольном моменте времени.

Массы рассматриваемой системы целесообразно сконцентрировать в местах, где сосредоточены значительные нагрузки. Достоверность и точность результатов расчета в значительной мере зависят от удачного выбора расчетной схемы, ее соответствия фактическим условиям работы сооружения.

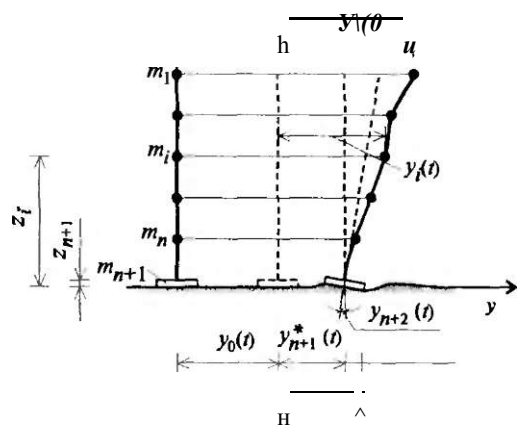


Рис. 5.13

В качестве примера рассмотрим методику расчета здания, имеющего п этажей на сейсмическом воздействии. Сконцентрировав массу здания на уровнях перекрытия и фундаментной плиты, получим систему в виде консольного стержня жестко заделанной в фундаментной плите, лежащей в условиях полного прилипания на поверхности упругого инерционного основания (рис. 5.13).

Будем рассматривать поперечные колебания стержня в плоскости ***(zy).*** Начало системы координат поместим в центре тяжести подошвы фундамента сооружения. Жесткость стержня по высоте изменяется по произвольному закону. На характер деформаций стержня не накладывается никаких ограничений, кроме требования линейной деформируемости.

Положение системы в произвольный момент времени ***t*** > О определяется линейными горизонтальными смещениями (y,- + jfo), (/= 1, 2,..., п + 1) (рис. 5.13).

Так как есть перемещение фунтов основания при землетрясении на свободной поверхности земли, в предположении отсутствия сооружения, то оно здесь принимается заранее заданной величиной. Следовательно, если нам удастся *определить величины* У/ (0 (' = 1. 2,..., n + 1), мы через значения этих величин в произвольный момент времени можем определить положение заданной системы.

Отсюда следует, что рассматриваемая система, располагая (л + + 1) количеством сосредоточенных масс, имеет (n + 1) степеней свободы.

Колебания линейной системы при заданном внешнем кинематическом воздействии полностью определяется ее инерционными и деформативными свойствами и параметрами рассеивания энергии. Инерционные свойства рассматриваемой системы характеризуются сосредоточенными массами /и, (/ = 1, 2,..., n + 1) и характером их распределения по высоте. Деформативные свойства системы могут быть охарактеризованы при помощи единичных перемещений б/* (/, к = \, 2,..., n + 1), представляют собой горизонтальное перемещение точек / от действия единичной горизонтальной силы, приложенной в точке ***к.*** Перемещение в рамках принятой расчетной схемы определяется

$$6^{\wedge} = 6^{\wedge} + 8^{\wedge} + 8^{\wedge}, \qquad (5.48)$$

где $6^{\wedge}, 8)^{\wedge}, 8^{\wedge}$— горизонтальные перемещения точки / от действия единичной горизонтальной силы, приложенной в точке *к,* обусловленные соответственно: деформациями конструктивных элементов здания; относительным сдвигом между подошвой фундаментной плиты и основанием; поворотом подошвы фундаментной плиты относительно основания.

Выражение можно записать в следующем виде

$$Sft = {}^{\&}{}'ik \quad {}_{c_1}{}^{+} \quad {}^{c}\phi \qquad (/, \kappa = \mathrm{I}, 2,..., n + 1), \qquad (5.49)$$

Так как фундаментная плита считается абсолютно жесткой, поэтому при / = ***п***+ 1, или ***к = п*** + 1 следует принимать = 0.

Здесь определяется по формуле Мора; ***С***\ и c_p — являются коэффициентами *квазистатической жесткости* основания *при* равномерном сдвиге и неравномерном сжатии или растяжении и их значения можно определить по следующим соотношениям автора [7]:

$$\frac{2S\text{-}S(1\text{-}n^2)pgj}{\text{тг}\{7\text{-}8_{\text{и}})}\quad \text{И}\,2_{\text{р а}}|$$

где приняты следующие обозначения: $a_j = \frac{}{2(1+p)p}$ скорость распространения поперечных волн в грунтах основания; р — плотность грунтов основания; F— площадь подошвы фундаментной плиты; Jf_x ~ момент инерции площади подошвы фундаментной плиты относительно оси х.

Для учета рассеивания энергии при колебаниях системы воспользуемся теорией Фойгта, согласно которой диссипативные силы прикладываются к сосредоточенным массам в состоянии движения системы, величина которых пропорциональна скорости движения сосредоточенных масс. Коэффициенты пропорциональности для рассматриваемой системы определяются по формуле автора 17]:

$$b_{ik} = \frac{}{a_{,,} + \frac{}{11}} \quad i, k = *\,2 \quad n + L \qquad (551)$$

Величина $a_v = a c o_v$, где $a = \frac{}{8}$; 8 — логарифмический декремент колебания, характеризует рассеивания энергии по корректированной гипотезе Фойгта за счет внутреннего неупругого сопротивления материалов конструкций при их деформации; т)i — характеризует излучение энергии в основании за счет сдвиговых деформаций, происходящих на контактной поверхности между фундаментной плитой и основанием; г)ф — коэффициент рассеивания энергии за счет неравномерных линейных деформаций, происходящих на контактной поверхности между фундаментной плитой и основанием.

Акустическое сопротивление основания при равномерном сдвиге T]I и неравномерного сжатия и растяжения т]ф определяются по известным соотношениям автора [7]

$$= 18.24(1\text{ - у} \qquad =$$

$$^{111} \qquad \text{я}(7\text{-}8\,\text{ц}) \qquad \text{<>} \qquad _{\text{Л}}(1$$

где $\text{flfi} = \text{т} \frac{(1\text{-}\text{Ц})}{\text{w}}\ \text{г}\frac{E}{\text{Р}}$ — скорость распространения продольных волн в грунтовом основании.

Воспользуемся методом сил и запишем величину перемещения *y i (f)* произвольной массы с номером /= 1, 2,..., л + 1, от действия сил инерции и сил учитывающих рассеивание энергии в рассматриваемой системе:

$$y,\{<) = 8.1\,[Л(>) + s_a(/)] + 5{,}2\,[/_2(/) + S,_2(/)] + ..[7_{и+1}(/) + S_{in+R}(t)],$$

(/= I, *2,...,n*+ 1). (5.53)

Здесь *Ij^t)* (Л—l, 2,..., л+1) сила инерции, действующая на *к*-ю массу и определяется по принципу Даламбера:

$$'*(') = -^{OT} * [Ы') + Й>(')] - \qquad (5{,}54)$$

Сила сопротивления *S*^t), возникающая в *к*-й массе, согласно гипотезе Фойхта, прямо пропорциональна величине скорости его движения:

Подставляя выражения (5.54) и (5.55) в (5.53) и после некоторых преобразований получим дифференциальное уравнение движения заданной системы в следующем виде:

$$+ \sum_{к=\backslash}^{л+1} ТЬк\ щ\ Ы') + \sum_{к=1}^{л+1} {}^{b}ik\ h\{0 = -л>(') \sum_{к=1}^{л+1} X^{8}/* {}^{m}к.$$

(/= 1, 2,..., п+ 1). (5.56)

Для расчета сооружений на сейсмические воздействия справедливы нулевые начальные условия, т.е. предполагается, что до начала землетрясения сооружение находится в состоянии покоя. При землетрясении сооружение, переходя в движение, ее состояние характеризуется системой уравнений (5.56).

Для расчета системы дифференциальных уравнений (5.56) применяется метод преобразования Лапласа, т.е. искомые функции находятся по формуле

где ***y,{s)*** является изображением функции y,{t) по Лапласу и определяется по формуле

$$_{yi}(s) = \int_0 e^{-st}\ _{yi}(t)dt. \qquad (5.58)$$

Подставляя (5.57) в (5.56) и с учетом нулевых начальных условий задачи, получим:

$$\%M + s^2 \sum_{k=1}^{я+1} T\&ik\ Щ\ \hat{}(5) + 5 \sum_{k=l}^{я+1} Zbik\ {}^{b}ik\ JfcW = -jfofc) \sum_{k=\backslash}^{л+1} Хб_{ik}\ m_k\ ,$$

$$(/= 1, 2, \ldots, «+ 1). \qquad (5.59)$$

Последнее представляет систему алгебраических уравнений относительно перемещений y,<s) в изображениях Лапласа.

Решение (5.59) в изображениях записывается в виде

$$= \qquad \textit{(5.60)}$$

где $D_t(s)$ — представляет собой определитель системы неоднородных алгебраических уравнений (5.59); $D(s)$ — определитель той же системы при неизвестных $y,(s)$.

Применяя к выражению (5.60) операции обратного преобразования Лапласа с применением теоремы свертки, получим решение задачи в следующем виде:

$$\kappa=1^{n}\int^{a}\kappa) \quad \text{o}$$

где $a_к$ корни уравнения $D = (s - a_l) - (s - a_2)...(s - a_{n+1}) = 0$, а $D'(^{a}k)\sim$ дифференциал определителя по $a_к$ при $S = a_к$, т.е.

$$D'(a_k) \qquad = \qquad (a_k\text{-}a_l)(a_k\text{-}a_2)...(a\text{-}_k\text{-}a._{k_lL})(a_k\text{-}a_{k+l})...(a_k\text{-}a_{n+}i).$$

В традиционных методах расчета сооружения на сейсмостойкость, как правило, применяется следующее упрощающее допущение, что основание сооружения является абсолютно твердым телом, т.е. Ci-юо и Сф→ω Если исходить из условия существования полного прилипания между фундаментной плитой и основанием на их контактной поверхности, очевидно, что масса с номером п + 1, т.е. фундаментная плита полностью повторяет закон движения основания. С другой стороны, так как закон движения основания в данном случае считается исходной известной функцией, следовательно, закон движения фундаментной плиты тоже следует считать известной величиной. Поэтому число степеней свободы рассматриваемой системы (см. рис. 5.13) на одну единицу уменьшается и принимает значение равное ***п.***

Искомыми величинами в данном случае являются перемещения сосредоточенных масс с номерами / = 1, 2, ..., п.

С учетом данного обстоятельства уравнение движения сооружения из (5.56) упрощается и принимает вид

$$y,-(O + \sum_{к=1}^{8};* \; ш_i \; y_k(t) + \sum_{*=1} \; ^{b},k \; У Ж) = -л>(01\,\% \; ^{m}к>$$

(/=1,2,..., л) (5.62)

Для решения системы дифференциальных уравнений (5.62) с постоянными коэффициентами применяется метод разложения колебаний по формам, основанный на методе разделения переменных, т.е.

$$* - M = \sum_{V=1} Z_{*} i\, v < M') - \qquad (5\text{-}^{63})$$

Сначала, для определения собственной частоты и собственного вектора Xj_V, рассматриваются собственные колебания системы без учета сил сопротивления. В данном случае из (5.62) получим уравнения движения системы без учета сил сопротивления в свободном режиме колебаний

$$Ж')^{+} \sum_{к=1} Ък^{m}к \, Ы')^{=} о. \quad C = \; ^{2}>-' \; ''>\bullet \qquad (^{5}\text{-}^{64})$$

Подставляя решение (5.63) в (5.64), с учетом условий ортогональности собственных форм колебаний, т.е.

$$£ \, ш_i \, X_{vk} \, X_{vi} = 0, \quad (/ * к, \; / , к = 1, 2, ..., л), \qquad (5.65)$$

$V=1$

и после ряда преобразований получим

$$\begin{array}{ll} Фу\,C) & ^{x}ы \\ Фу(') & Л \\ & Ъ \\ & к=1 \end{array} \; m_к \cdot b_{ik} \; ''X^{\wedge} \qquad (5.66)$$

Выполнение этих равенств для произвольного значения t возможно лишь в том случае, если каждая из них в отдельности равна одной и той же постоянной при любом значении v. Обозначив эту постоянную через coQ_v, получим

$$\sum_{*=1} t^{m}к^{\&}{}'ik \; X/cv \sim {}^{X}iv \sim T \sim^{=} \qquad C = \quad 2,..., л). \qquad (5.67)$$

Последние уравнения представляют собой систему п линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных Xj_v для каждой v= 1, 2..., п формы колебаний.

Для определения ненулевых решений системы (5.67) необходимо обеспечить равенство нулю ее детерминанта

$$\text{Щ } 8'\text{п } \frac{\text{т}}{\text{Щ}} \quad m2^{6}12 \qquad \text{т},n\&1n$$

О. (5.68)

$$m_x\ 8_{\text{Л1}} \qquad m_2\ 8_{л2} \qquad \text{Щ } 8_{,,,,}$$

©о

В развернутом виде это выражение представляет собой алгебраическое уравнение п-й степени относительно cofj. Корни этого уравнения вещественны, положительны и в большинстве случаев отличны друг от друга. Таким образом, из решения (5.68) определяется п положительных значений ω_0> которые в возрастающем порядке $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$ являются собственными частотами системы без учета ее диссипативных свойств.

После определения собственных частот из решения системы (5.67) определяются значения собственных векторов Xj_v (/ = 1, 2,..., п) для каждой v-й формы колебаний.

Для определения решения уравнений движения системы в вынужденном режиме колебаний подставим выражение (5.63) в уравнения (5.62) и с учетом условий ортогональности (5.65), получим

$$\Phi_y(0 + 2s\ \omega_v\ \theta_v(t) + \omega^*\ \theta_v(t) = \sim D_V\ y_0(t), \tag{5 69}$$

где приняты следующие обозначения:

$$v \qquad \frac{Z^m n^X k v}{\text{п}} \quad 1 \quad ; \qquad e = \frac{=}{It}. \tag{5.70}$$

$$Y m_k x l$$
$$\kappa=1$$

При нулевых начальных условиях, решая дифференциальное уравнение (5.69) и подставляя в (5.63), окончательно получим

$$y_i(t) = - \sum_{v=1} \frac{1}{\omega_V} Yo\text{№} \qquad \sin \omega_v(/ - \text{т})\ A, \tag{5.71}$$

где $\omega_{,-} = c o_0 \backslash 1 - e^2$ — называется частотой собственных колебаний с учетом диссипативных свойств системы.

Как показывает уравнение (5.69), применение принципа разложения колебаний по собственным формам позволяет рассматривать колебания линейно-деформируемых систем по отдельным формам независимо от колебаний по другим формам, вследствие чего системы со многими степенями свободы рассчитываются, как системы с одной степенью свободы для каждой отдельной формы.

Указанный подход позволяет при рассмотрении системы со многими степенями свободы оценить динамический эффект внешнего воздействия через значения коэффициента динамичности для системы с одной степенью свободы.

Сейсмические колебания системы с одной степенью свободы из (5.54) принимают вид:

$$Л(0 = 8_{11}[/1(0 + 5ц(0], \qquad (5\text{-}72)$$

откуда

$$ту^O + Ь ц \quad + = - щ \; j>_0(f). \qquad (5.73)$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$ш + 2 ^ (0 + ш^2 л (0 = -j>o(0. \qquad (5.74)$$

где $e = \frac{1}{2} - c \quad o \quad \frac{2}{} — \frac{\overline{1}}{б_n m}$.

Решение последнего уравнения имеет вид

$$ЛС) = -1 \int_{\omega o} й>(т) e^{Ч('\sim T)} \sin a(t - x)\, d x. \qquad (5.75)$$

Дважды дифференцируя последнее выражение, получим относительное ускорение , после суммирования ***y(t) c*** $j>_0(')$ получим последнее ускорение системы с одной степенью свободы в следующем виде:

$$= ^ I yo(т) \qquad \sin ш [(Г - т) + б,,]А , \qquad (5.76)$$
$$щ \; O$$

где

$$co^2 = co^2 - \qquad б,-= arctg \qquad (5.77)$$

Коэффициент динамичности в данном случае определяется по формуле

$$W\backslash \qquad (5.78)$$

Л

Примерный вид фафика ускорения колебания фунтов при сейсмических воздействиях представлен на рис. 5.14.

Из обобщенного анализа более тридцати различных землетрясений ускорений колебаний фунтов $y_0(f)$ был установлен фафик коэффициента динамичности с обеспеченностью P = 0.98 и имеет вид, представленный на рис. 5.15.

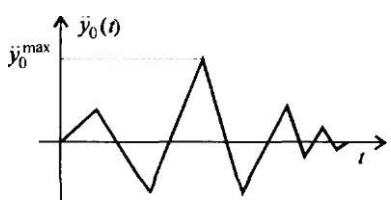


Рис. 5.14

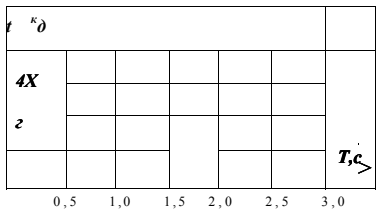


Рис. 5.15

5.8. Определение величин сейсмических усилий при расчете сооружения на сейсмостойкость (задача № 15)

По спектральному методу требуется определить величину сейсмических сил и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил по высоте трехэтажного дома, предполагая, что интенсивность сейсмического воздействия равна 9 баллам по шкале MSK-64, т.е. $|_po(')|_{max}$ = 0-4g . Грунты основания являются суглинками с характеристиками: $p_г$ - 1.8 кНс^2/м^4; *Ер*= 7-Ю^4 кН/м^2; р/- = = 0.35.

Трехэтажный железобетонный дом, расчетная схема которого представлена на рис. 5.16, о, характеризуется следующими параметрами: /и, = m_2 = m_3 = m_4 = 300 кН-с^2/м; EJ_X= 29-10^9 кН м^2; *GF* = = 0.5-10^7 кН-м^2. Размеры сооружения в плане $L\backslash$ = L_2 = 18 м. Логарифмический декремент затухания колебания принимается равным 6 = 0.25.

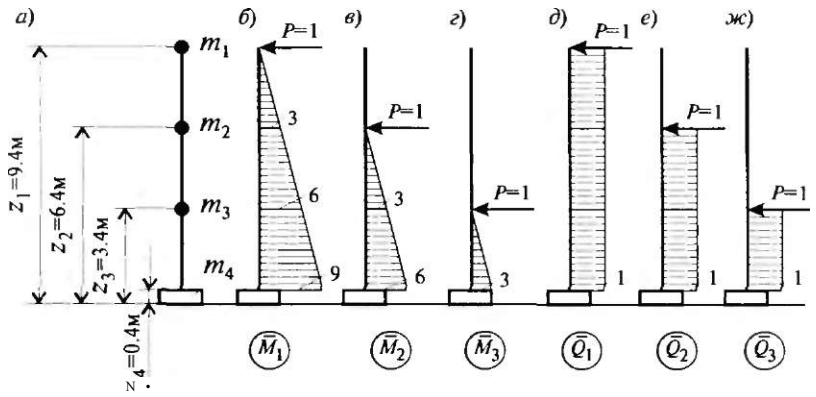


Рис. 5.16

Решение

1. Определить частоты собственных колебаний при горизонтально-вращательном движении здания, предполагая его абсолютно жестким телом

Скорости распространения продольных и поперечных волн грунтов принимают значения:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1-\mu_r}{(1+\mu_r)(1-2\mu_r)}\frac{E_r}{\rho_r}} = \frac{1\text{-}0.35}{(1+0.35)(1-2\cdot 0.35)}\frac{7\ 10^4}{1.8} = 250\ \text{м/с};$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu_r)}\frac{E_r}{\rho_r}} = \sqrt{\frac{1}{2(1+0.35)}\quad 1.8} = 120\ \text{м/с}.$$

Далее определим квазистатические жесткости основания при сдвиговом и вращательном движении здания:

$$28.8(1-p^2)p_{\text{„}}(£\ ,\quad \overline{288(1\text{-}035^2)\text{-}1.8\ \ 120^2} <$$

$$\text{«(7-ад}\qquad\qquad \%\ J - \boldsymbol{m}$$

$$= \frac{L_x\ 4}{\text{j r . }} = \frac{8\text{^}2\text{-}1.8\text{-}120^2\text{-}18\text{-}183}{\text{V3T4 -(1-0.35).12 18}} = \text{^}\quad\text{^}$$

$$>/я(1\text{-}ц)$$

Определим общую массу здания и момент инерции сосредоточенных масс относительно центра вращения, т.е. относительно центра подошвы фундамента сооружения:

$$м = \sum_{i=1}^{4} Ъщ = 1200 \text{ кНс}^2/\text{м};$$

$$J_и = I Щ z\} = 300 \cdot 9.4^2 + 300 \cdot 6.4^2 + 300 \cdot 3.4^2 + 300 \cdot 0.4^2$$

$$= 300 (9.4^2 + 6.4^2 + 3.4^2 + 0.4^2) = 42312 \text{ кНм/с}^2.$$

Частоты собственных колебаний здания в виде жесткого тела при горизонтальном и вращательном движениях принимают значения:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{M}} = \sqrt{\frac{8.94 \cdot 10^5}{1200}} = 27.295 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_\varphi = \sqrt{\frac{c_\varphi}{J_M}} = \sqrt{\frac{58.16 \cdot 10^5}{42312}} = 11.72 \text{ с}^{-1}.$$

2. *Определить собственные частоты колебания здания при одновременном учете изгибных и сдвиговых деформаций конструкций, без учета податливости основания*

Единичные эпюры моментов и поперечных сил изображены на рис. 5.16, *б — ж.*

Применяя формулу Мора с учетом эпюры моментов и поперечных сил, изображенных на рис. 5.16, последовательно вычисляются:

$$6 h \quad \frac{1}{EJ} \text{ дг, м x +} \quad GF \quad = \quad 29 \cdot 10^{\wedge} \quad \frac{9}{6} \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 + \frac{1.2}{0.5 \cdot 10^7} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 =$$

$$= (8.38 + 2160) \cdot 10^9 = 21.684 \cdot 10^{"7} \text{м/кН};$$

$$\delta'_{21} = \delta'_{12} = \frac{1}{EJ} \overline{M}_1 \overline{M}_2 + \frac{1.2}{GF} \overline{Q}_1 \overline{Q}_2 = \frac{1}{29 \cdot 10^9} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 9 \cdot 6 + 6 \cdot 3) +$$

$$+ \frac{1.2}{0.5 \quad 10^7} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = (4.35 + 1440) \cdot 10^{-9} = 14.444 \cdot 10^{-7} \text{ м/кН};$$

$$5з1 \quad = 5 \quad 1 \quad 3 \quad \frac{=}{EJ}^{\wedge} \quad 7 \quad ^{\wedge} \quad 1 \quad ^{\wedge} \quad 3 \quad \frac{+}{GF}^{\wedge} \quad 0 \quad \text{ft} \quad = \frac{1}{29 \cdot 10^9} \cdot \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 9 \cdot 3 + 3 \cdot 3) +$$

$$+ \frac{1\,2}{0.5 \cdot Ю^7} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = (1.09 + 720) \cdot 10 \qquad .211 \quad 10"^7 \text{ м/кН:}$$

$$\cdot 2\text{-}6\text{-}6 + \frac{1.2}{0.5 \cdot 10^{7}}\text{-}6\text{-}1\text{-}1 =$$

$$= (2.48 + 1440) \cdot Ю^{-9} = 14.425 \cdot 10^{-7} \text{ м/кН};$$

$$523 = 532 \sim M_2 M\ 3 + \wedge G_2 G\ 3 = \wedge | (2\text{-}6\ .\ 3 + 3\text{-}3) +$$

$$\frac{1.2}{0.5 \cdot 10}\ у\ 3\text{-}1\text{-}1 = (0.78 + 720) \cdot Ю^{-9} = 7.278 \cdot 10^{7} \text{ м/кН};$$

$$5\ з\ з = \wedge M_3 M\ з + \S_e\ з\ C\ з = \wedge | - 2\ .\ 3\ .\ 3 + - \frac{1.2}{0.5\text{-}10'} \cdot 3\ 1\ 1 =$$

$$= (0.31 + 720) \text{-}10^{-9} = 7.203 \cdot 10^{-7} \text{ м/кН}.$$

Для определения собственных частот воспользуемся частотным уравнением из (5.68):

$$'M\ 11 \quad 2 \quad т_2\ 5f_{12} \quad \textit{Щ}\ 5(з$$

$$т_2\ б_{22} \text{—}^{1}\text{-} \quad \textit{1Щ}\ 5\ 23 = 0.$$

$$\text{со о} \quad \text{cog}$$

$$т_2 Ь'_{32} \quad «з\ 5_{33} \quad 2$$

$$\text{со о}$$

Делим каждый член последнего уравнения на m_3 633 и принимаем $\frac{1}{\text{Щ } 5_{33}} = y$, получим:

тхЬ'$_{п}$ $_{x}$	т$_2$ 6(2	Щ $13			
Щ $33	т ^{б}33	Щ $33	3.01 - X	1.02	1.00
Щ $21	m_2 *Ъ'*$_{22}$ $_{x}$	m_3 623	2.01	2.003 - X	1.01
щЬ'гъ	m_3 833	*Щ* $33			
Щ $3i	m_2 832	m_{2x} 833	1.00	1.01	1.00 - X.
/яз 833	*Щ* $33	*Щ* $33			

$$= A^3 - 6.013A.^2 - 4.982A. - 0.975 = 0. \qquad (5.79)$$

Коэффициенты кубического уравнения имеют следующие значения: $a = 1$; $b = -6.013$; $c = -4.982$; $d = -0.975$.

Для определения корней кубического уравнения (5.79) по методу Кардано вводим следующие обозначения:

$X = X + \frac{}{3a} = X - 20043$; $q = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{be}{3a} + d = -3.547$;

$P = -\frac{3}{9a^2}(ac - b^2) - 2.357$; $D = p^3 + q^2 = -39.072 < 0$;

/• = ±J[7[, т.к. q < 0, то r = -J[7f= -^{1}-^{535}-

Учитывая, что Z> < 0, p < 0, имеем: $\cos\phi = \frac{}{r^5} = 0.9807$; ф = = 11°20' ф/3 = 3°47', следовательно:

$$L = -2\sqrt{-}\cos\frac{}{3} = 2 \cdot 1.535 \cdot 0.998 = 3.064;$$

$$X_2 = 2r\cos(60 - y) = -3.07 \cdot \cos 56°13' = -1.994;$$

$$X_3 = 2r\cos(60 + = -3.07 \cdot \cos 63°47' = -1.351.$$

Далее:

$$=2.0043 + = 2.0043 + 3.064 = 5.0683;$$

$$\backslash_2 = 2.0043 + k_2 = 2.0043 - 1.709 = 0.2953;$$

$$X_3 = 2.0043 + k_3 = 2.0043 - 1.3508 = 0.6635.$$

В возрастающем порядке «oi < ©02 < ©оз определим частоты собственных колебаний здания без учета диссипативных свойств здания:

$$©01 = \frac{}{\frac{1}{пьЬ'ззЬ}\sqrt{\frac{ю^7}{300 - 7.203 \quad 5.0683}}} = 30.22\ с^{-1};$$

$$©02 = \frac{}{\frac{1}{tn_3\ 633\ к_3}\sqrt{\frac{10^7}{300 \cdot 7.203 \quad 0.6535}}} = 84.15\ с^{-1};$$

$$©03 = \frac{}{\frac{1}{I\ m_3\ 633\ \backslash_2}\sqrt{\frac{10^7}{\backslash\ 300 \cdot 7.203 \cdot 0.2953}}} = 125.19\ с^{-1}.$$

Собственная частота колебания здания с учетом диссипативных свойств здания принимает значения:

$$©1 = ©01\sqrt{1 - [^2} = 30.22\sqrt{1 - (Щ)} = 30.22 \cdot 0.997 = 30.13\ с^{-1};$$

«2 = «02 л 1 84.15 0.997 = 83.9 с"1;

со$_3$ = ω оз 1-1 -J = 125.19 0.997 = 124.8 $с^{-1}$.

3. Определить собственные значения, проверить ортогональность между различными формами колебания и построить формы колебания

Из (5.67), для первой формы колебаний имеем:

I «01- ***Xu*** + Щ^{б}12 *21 + ***щ&н ХЦ*** = 0;

ЩЬ'ъХп + ^{m}2 &22 Г *21 + ***Щ***^{8}23 ^31 = 0; (5.80)

^{т} \ 831 ^11 + **щ ^{8}32 ^{X}2** ***Щ*** &33 Т ***ЩО*** ***Хъх*** = 0.

Последовательно вычисляются коэффициенты при неизвестных:

Щ ^{8}П — \ woi^ = (300 • 21.684 • 10'^{7} - 30.22" = -4.445 • 10"^{4} ;

m$_2$ 8}$_2$ = 300 • 14.444 • 10~^{7} = 4.333 • Ю$^{-4}$; *щ Ъ'$_{2X}$* = 4.333 • Ю"^{4};

m$_ъ$ 8[з = 300- 7.211 • 10~^{7} = 2.163 • 10~^{4}; *пц* 8^ = 2.163 • 10~^{4};

m$_2$ 822 - - у «Ol/' = 300-14.425 •КГ^7 Ц - 1 30.22 = -6.623 -10"^{4};

Щ ^{8}33 - - у " ®01. = 300 • 7.203 • 10^{-7} 1 30.22 = -8.789 10"^{4};

m$_2$ Ъ'$_{ъ2}$ = 300 -7.278 • Ю'^{7} = 2.183 • 10"^{4}; *m$_3$ Ь'$_{23}$* = 2.183 • 10"^{4}.

Подставляя эти коэффициенты в (5.80) и умножая каждый член уравнения на 10^4, получим:

-4.445 X_n + 4.333 • X_{2x} + 2.163 - Л'з! = 0;

4.333 X_n- 6.623 • *22 + 2.183 • $X_{ъx}$ = 0;

2.163 • X_n + 2.183 X_{21} - 8.789 • X_{31} = 0.

Так как данная система представляет собой систему однородных алгебраических уравнений, поэтому определяются относительные

величины неизвестных. Полагая $X_{xx} = 1$ из первых двух уравнений, получим

$$J\ 4.333 \cdot Xj\backslash + 2.163 \cdot \quad = 4.445;$$

$$[-6.623 \cdot X_{22} + 2.183 \cdot X_{зх} = -4.333.$$

Решая данную систему уравнений, получим $X_{2x} = 0.79$; ЛЗ1 = = 0.41.

Для определения собственных значений, по второй форме колебаний здания, предварительно определим коэффициенты при неизвестных, содержащих собственные частоты:

$$= (6.505 - 1.412) \cdot 10^{-4} = 5.093 \cdot 10^{-4};$$
$$^{ы}02$$

$$m_2\ 622 - \quad = (4.3275 - 1.412) \cdot 10^{-4} = 2.915 \cdot 10^{-4};$$

$$Щ\ ^{8}33 - \quad = (2.1609 - 1.412) \cdot 10^{-4} = 0.749 \cdot 10^{-4}$$
$$®0\ 2J$$

Уравнения относительно собственных векторов по второй форме колебания принимают вид:

$$5.093 \cdot X_{X2} + 4.333 \cdot *22 + 2.163 \cdot ЛГ_{32} = 0;$$

$$\cdot 4.333 \cdot X_{12} + 2.915 - X_{22} + 2.183\ X_{32} = 0;$$

$$2.163 \cdot X_{X2} + 2.183 \cdot X_{22} + 0.749 \cdot ЛГ_{32} = 0.$$

Принимая $X_{x2} = 1$, первые два уравнения последней системы преобразуются в виде:

$$14.333 \cdot *22 + 2.163 \cdot X_{32} = -5.093;$$

$$[2.915 \cdot X_{22} + 2.183 \cdot X_{32} = -4.333.$$

Из решения *последней системы определяются:* $X_{22} = -0.595;$ Л з 2 = - 1-29.

Для определения собственных значений по третьей форме колебаний предварительно определяются:

$$Щ\ ^{8}П\ --J \quad = (6.505\text{-}0.64)\text{-}КГ^{4} = 5.865\ \text{in}$$

$$т_2\ 822 \quad = (4.3275 - 0.64)\ 10^{-4} = 3.68Ь$$
$$®03>$$

$$\textbf{Щ}^{6}33 - \qquad (2.1609\text{-}0.64)\ 10''^{4} = 1.521\ 10^{-4}$$

Система уравнений относительно собственных значений принимает вид:

$$5.865 \bullet X_{n} + 4.333 \bullet X_{23} + 2.163 \bullet Л\text{^}з = 0;$$

$$4.333 \bullet Л\text{^}з + 3.688 \bullet X_{23} + 2.183 \bullet Л\text{^} = 0;$$

$$2.163 \bullet X_{u} + 2.183 \bullet X_{23} + 1.521 \bullet Л'зз = 0.$$

Полагая = 1, из первых двух уравнений, получим

$$4.333 \bullet X_{23} + 2163 \bullet X_{33} = -5.865;$$

$$3.688 \bullet X_{23} + 2.183 \bullet \text{^}33 = -4\text{-}333.$$

Отсюда $X_{1ъ} = -2.3$; $X_{33} = 1.95$.

Учитывая, что в данном примере $\boldsymbol{m}\backslash = \boldsymbol{m_2} = \boldsymbol{m_3}$, условие ортогональности между первой и второй формой записывается в следующем виде:

$$m_1X_{11}X_{12} + m_2X_{21}X_{22} + m_3X_{31}X_{32} = m_1\left(X_{11}X_{12} + X_{21}X_{22} + X_{31}X_{32}\right)$$

$= 300(1 \bullet 1 - 0.79 \bullet 0.595 - 0.41\ \ 1.29) = 300(1 - 0.470 - 0.530) = 0.$

Условие ортогональности между первой и третьей формой:

$Щ \qquad +*21*23 + X_{3}yX_{33}) = 300(1 \bullet 1 - 0.79 \bullet 2.3 + 0.41 \bullet 1.95) =$

$= 300(1\text{-}1.816 + 0.816) = 0.$

Условие ортогональности между второй и третьей формой:

$^{т}\backslash(\text{^}12\text{^}13 + \text{^}22\text{^}23 + \text{^}32*33) = 300(м + 0.595 \bullet 23 - 1.29 \bullet 1.95) =$

$= 300(1 + 1.377 - 2.390) = 0.$

Формы колебания показаны на рис. 5.17.

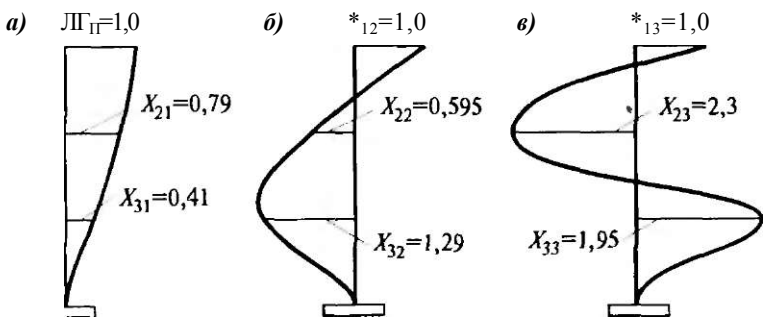


Рис. 5.17

4. *Определить коэффициенты разложения D_v и коэффициенты формы колебания*

Значения коэффициентов разложения $\boldsymbol{D_v}$ определяются по формуле (5.80), а значения коэффициентов формы колебаний — по формуле $r_{j,-v} = \boldsymbol{Xi_v\ D_v}$:

$$D \quad \frac{m_x X_x i + m_2 X_{2X} + m_3 X_{3X}}{m_x X_{xx} + mjXji + m_3 xj_x} \quad \frac{300(1.0 + 0.79 + Q.41)}{300(1.0^2 + 0.79^2 + 0.41^2)}$$

$$П_и = X_{xx} Dx = 1.23; \quad r_{j2i} = X_{ix} D_x = -0.97; \quad n_{31} = X_{3x} I\backslash = 0.5;$$

$$D \quad \frac{m_x X_{X2} + m_2 X_{22} + m_3 X_{32}}{m_x X_{X2} + m_2 X_{22} + m_3 X_{32}} \quad \frac{300(1.0 - 0.595 - 1.29)}{300\,(1.O^2 + 0.595^2 + 1.29^2)}$$

$П12 = X_{X2} D_2 = -0.29; \quad П22 = X_{22} D_2 = -0.97 \quad пз_2 = *32\hat{}2 = 0.37;$

$$\frac{ЩX_{X3} + m_2 X_{23} + m_3 X_{33}}{m_x X?_3 + m_2 X\%_3 + m_3 X\$_3} = \frac{300(1.0 - 2.3 + 1.95)}{300\,(1.O^2 + 2.3^2 + 1.95^2)} \quad Q\%$$

$Л13 = ВД = 0\text{-}06; \quad n_23 = X_{23} D_3 = -0.14; \quad П_з3 = X_{33} D_3 = 0.12.$

5. *Определить значения коэффициента динамичности для каждой формы колебаний с учетом податливости основания сооружения*

Круговая частота собственных колебаний здания для каждой формы, с учетом диссипативных свойств конструктивных элементов сооружения и податливости, основания определяется по формулам Дункерлея:

$$\omega_1 = \frac{\text{ююсо}_г\text{-ю}_ф}{\text{ю}_1\text{ю}_г + \text{ш}_1\text{ш}_ф + \text{ш}_г\text{ш}_ф} = \frac{30.13\text{-}27.3\text{-}1L72}{\text{ю}_1\text{ю}_г + \text{ш}_1\text{ш}_ф + \text{ш}_г\text{ш}_ф} = 62\,c^{-1}\text{-}$$

$$\omega_2 = \frac{\text{ююсо}_г\text{-ю}_ф}{\text{ю}_2\text{ю}_г + \text{ш}_2\text{ш}_ф + \text{ш}_г\text{ш}_ф} = \frac{83.9\text{-}27.3\text{-}1L72}{83.9 - 27.3 + 83.9 \bullet 1L72 + 27.3\text{-}1L72} = 7.47\ c^{-1};$$

$$\omega_3 = \frac{\text{ююсо}_г\text{-ю}_ф}{\text{ю}_3\text{ю}_г + \text{ш}_3\text{ш}_ф + \text{ш}_г\text{ш}_ф} = \frac{124.8\ \ 27.3\ \ 11.72}{124.8\text{-}27.3 + 124.8\ \ 11.72 + 27.3\ \ 1L72}$$

Соответствующие периоды колебания принимают значения:

$$\hat{} = \frac{2я}{\text{шГ}} = \frac{628}{6.20} \qquad . = \frac{2л}{ы^*} = \frac{6{,}28}{7.47} = 0\,8\,4\,c$$

$$. = \frac{2я}{} = \frac{6{,}28}{7.69} = 0\,8\,2\,c$$

Периоды собственных колебаний без учета податливости оснований принимают следующие значения:

$$7] = \frac{}{to\ J} = 0.21c; \quad T_2 = \frac{}{и2} = 0.075\ c; \quad T_3 = \frac{}{(l)3} = 0.05\ c.$$

Значения коэффициентов динамичности для каждой формы колебаний определяются из обобщенного графика, изображенного на рис. 5.15:

а) с учетом податливости основания:

$$кд(1) = 1\text{-}7; \quad к^*_{д(2)} = 1.8; \quad кд_{(3)} = 25;$$

б) без учета податливости основания:

$$к_{д(1)} = 3\ 8; \quad к_{д(2)} = 3\ 0; \quad к_{д(3)} = 15\ \text{-}$$

6. *Определить спектральные значения сейсмических сил с учетом всех форм колебаний и построить эпюры моментов и поперечных сил*

Спектральные (максимальные) значения сейсмических сил с учетом всех форм колебаний вычисляются следующим образом:

а) с учетом податливости основания сооружения:

$$1[= \sum_{v=l}^{3} ещ, к^*_{д(у)}\ yg™\ niv = У™ \sum_{v=l}^{3} I\ Щ, кд_M\ T)iv = Щ\ 0\text{-}4g \sum_{v=l}^{3} I\ к^*_{д(у)\ niv} =$$

=300 0.4-9.81 (1.7-1.23 - 1.8-0.29 + 1.81-0.06) = 1177.2 (2.091 - - 0.522 + 0.19) = 1975 кН;

$$/2 = m_x\ yfi™ \sum_{V=l} \quad n_2v = 300\text{-}0.4\text{-}9.81\ (1.7\text{-}0.97 - 1.8\text{-}0.17 +$$

+ 1.81-0.14) = 1177.2-(0.85 + 0.506 - 0.253) = 2003 кН;

$$r3 = {}^{m}l\ Уo^{iax} \sum_{V=l}^{3} Z.4(V)\ n_3v = 300\text{-}0.4\text{-}9.81\ (1.7\text{-}0.5 + 1.8\text{-}0.37 +$$

+ 1.81-0.12) = 1177.2 (0.85 + 0.666 + 0.217) = 2040 кН.

б) без учета податливости основания сооружения:

$$/, = m_x\ yfi™ \sum_{V=l} \quad Jllv = П77.2\ (3.8\text{-}0.97 - 3.0\text{-}0.29 + 2.5\text{-}0.06) =$$

= 1177.2 (3.686 - 0.87 + 0.15) = 3492 кН;

$$h = Щ\ УГ* \sum_{V=l} \quad r\backslash_2v = 1177.2\ (3.8\text{-}0.97 - 3.0\text{-}0.17 + 2.5\text{-}0.14) =$$

= 1177.2 (3.686 + 0.51 - 0.35) = 4528 кН;

h = Щ Уо™* $\sum_{v=1}^{k}$ i M v) n3v = П77.2 (3.8 0.5 + 3.0 0.37 + 2.5-0.12) =

= 1177.2 (1.9 + 1.11 + 0.3) = 3897 кН;

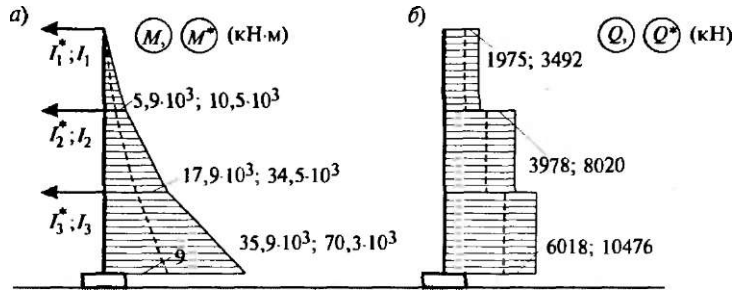


Рис. 5.18

Эпюры моментов (о) и поперечных сил (б) изображены на рис. 5.18. Пунктир на рис. 5.18 относится к случаю, когда податливость основания учитывалась, сплошные линии относятся к эпюрам без учета податливости основания.

5.9. Поперечные колебания балки с распределенными параметрами

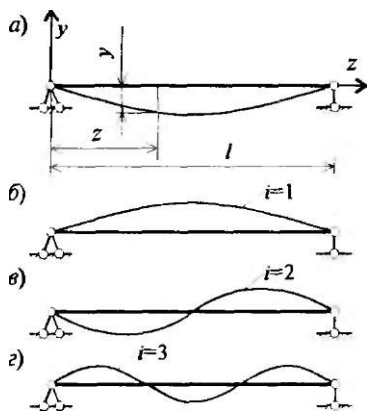


Рис. 5.19

Рассмотрим свободные колебания балки с постоянным поперечным сечением площадью ***F,*** плотностью р материала конструкции, без учета диссипативных свойств системы (рис. 5.19, а).

Дифференциальное уравнение колебания системы с учетом следующго дифференциального соотношения теории изгиба имеет вид:

$$EJ_x \frac{d^4 y(z,t)}{dz} = q(z,t) \qquad (581)$$

Здесь ***q(z, t)*** — распределенная инерционная нагрузка, которая возникает при движении балки:

$$q(z,t) = -m_z\ y(z,t) = -p\ Fy(z,t), \qquad (5.82)$$

где $m_z = \rho F$ — распределенная масса балки.

Совместно рассматривая соотношения (5.81) и (5.82), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний балки без учета диссипативных свойств системы.

$$EJ\frac{\partial^4 y(z,t)}{dz^4} + \rho F \frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = 0. \qquad (5.83)$$

Если учесть затухания колебания по Фойхту в вынужденном режиме при действии внешней нагрузки $P(Z,f)$ на балку, дифференциальное уравнение (5.83) преобразуется в виде

$$EJ\frac{\partial^4 y(z,t)}{dz^4} + \alpha EJ\frac{\partial^5 y(z,t)}{dz^4 dt} + \rho F\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = p(z,t), \qquad (5.84)$$

т.е. для исследования вынужденного движения балки необходимо рассмотреть решение уравнения (5.84), при заданных граничных условиях закрепления балки и начальных условиях задачи.

Рассмотрим решение задачи в свободном режиме колебания.

Для решения задачи применим метод разделения переменных,

$$y(z,t) = Z(z)\,B(t) = Z(z)\sin\omega t. \qquad (5.85)$$

Подставляя решение (5.85) в уравнение (5.83) и, принимая обозначения

$$= \frac{\rho F}{EJ} \qquad (5.86)$$

получим:

$$Z^{(IV)} - \beta^4 Z = 0 \qquad (5.87)$$

Решение последнего уравнения запишем в общем виде

$$Z = Q\sin\beta z + C_2\cos\beta z + C_3\,\mathrm{sh}\beta z + C_4\,\mathrm{ch}\beta z. \qquad (5.88)$$

Произвольные постоянные C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) должны быть определены из граничных условий закрепления балки.

Предположим, что рассматриваемая балка закреплена в обоих концах шарнирно. Тогда на каждой опоре прогиб y и изгибающий момент $EJ_r\frac{\partial^2 y}{dz}$ обращаются в нуль, следовательно, учитывая решение (5.88), имеем

$$Z(0) = \left(\frac{dz}{dz^{l}}\right) = 0 \; ; \qquad {}_{z}(/) = \left(\frac{dz}{dz^{l}}\right) U \; 0 \; .$$

Из первых двух условий вытекает, что $C_2 = C_4 = 0$. Из двух других получим

$$Ci \sin p/ + C_3 \operatorname{shp}/ = 0;$$

$$-C\backslash \sin p/ + C_3 \operatorname{shp}/ = 0.$$

Приравниваем нулю определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} \sin p/ & \operatorname{sh} p/ \\ \bullet \sin p/ & \operatorname{sh} p/ \end{vmatrix} = 0,$$

откуда имеем $\sin p/ \operatorname{shp}/ = 0$.

Но так как гиперболический синус обращается в нуль только при $p/= 0$, то остается $\sin p/= 0$ или $p/= in$ ($/= 1, 2,...$), или согласно (5.86), выражение частоты собственных колебаний принимает вид

В зависимости от значения $/= 1, 2,...$ по формуле (5.89) определяется спектр частот собственных колебаний соответствующий собственным формам, показанным на рис. 5.19, ***б*** — ***г.*** Упругая линия балки, учитывая, что $C_2 = C\$ = Q = 0$, при i-й форме колебаний имеет вид

$$Zj = Cj \sin \frac{niz}{y} .$$

Окончательная формула по определению прогиба балки, согласно (5.85), записывается в виде

$$y(z, t) = \sum_{/=1}^{\infty} y_t(z, /) = \sum_{;=i}^{\infty} C_j \sin \frac{\hat{} \hat{} 2}{'} \bullet \sin co,-/,$$

здесь Q— определяется из начальных условий задачи, в зависимости от способа возбуждения колебаний балки.

5.10. Определение основной частоты собственных колебаний консольной балки (задача № 16)

Требуется определить основную частоту собственных колебаний консольной балки с постоянным поперечным сечением (рис. 5.20).

кг -

Рис. 5.20

Для определения функции Z в данном случае имеем следующие граничные условия:

$$y(0./) = /(0,/) = 0;$$

$$M_x\{l,t) = Q_y\{l,t) = 0.$$

откуда получим

$$Z(0) = Z'(0) = 0;$$

$$\frac{d^2Z(l)}{dz^2} \quad \frac{d\ Z(l)}{dz^3} \quad 0. \tag{5.90}$$

Подставляя выражение (5.88) в граничные условия (5.90), будем иметь

$$C_2 + C_4 = 0 ;$$

$$\mathbf{q + c_3 = o}$$

$$-C, \sin p/ - C_2 \cos p/ + C_3 sh\ p/ + C_4 ch\ p/ = 0 ;$$

$$-Q \cos p/ + C_2 \sin p/ + C_3 ch\ p/ + C_4 sh\ p/ = 0 .$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin p/ & -\cos p/ & shp/ & chp/ \\ -\cos p/ & \sin p/ & Chp/ & shp/ \end{matrix} = 0,$$

отсюда имеем $sh\ p/ \cos p/ = -1$.

Наименьший корень этого трансцендентного уравнения принимает значение $p/ = 1.875$.

Учитывая соотношение (5.86), находим частоту основного (наименьшего) тона колебаний

$$\omega_1 = \frac{3.5^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

Вопросы для самопроверки

1. Поясните основные задачи динамической теории инженерных конструкций.
2. Какие виды динамических *нагрузок вы можете перечислить?*
3. Какое явление называется резонансным?

4. Какие колебания называются свободными или собственными?
5. Какие колебания называются вынужденными?
6. Дайте определение понятий круговой и фазовой частоты соответственно.
7. Дайте определение периода собственных и вынужденных колебаний соответственно.
8. Что называется числом собственных колебаний заданной системы.
9. Перечислите основные подходы, применяемые при решении задач динамики.
10. Сформулируйте понятия сила инерции и сила сопротивления по Фойгту.
11. Дайте определение понятий консервативные и неконсервативные системы.
12. Дайте определение понятия система с конечным числом степеней свободы.
13. Дайте определение понятия система с распределенными параметрами.
14. Сформулируйте условия ортогональности собственных колебаний.
15. Сформулируйте понятие собственные формы колебания.
16. Сформулируйте понятие собственные частоты колебаний.
17. Дайте определение коэффициента динамичности для системы с одной степенью свободы.
18. Поясните причины возникновения сейсмических колебаний сооружений.
19. Поясните суть спектрального метода теории сейсмостойкости.
20. Поясните понятие коэффициенты разложения и коэффициенты формы колебаний.

ГЛАВА 6

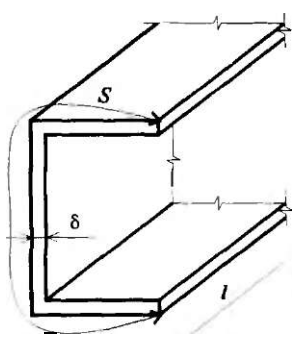
ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

6.1. Общие положения и основные особенности расчета

В настоящее время в машиностроении, авиации, строительстве, железнодорожном транспорте все больше используются конструкции, выполненные из тонкостенных и штампованных профилей или просто из тонколистовой стали. Эти конструкции обеспечивают высокую жесткость и прочность при сравнительно небольшом весе, поэтому их применение в технике является весьма экономичным. На железнодорожном транспорте это элементы тележек, стенок локомотивов, вагонов и многих других конструкций.

Специфика расчета этих конструкций на прочность породила особую расчетную схему — схему *тонкостенного стержня.*

Основным признаком тонкостенного стержня является характерное отношение его геометрических размеров. В поперечном сечении одно из измерений (толщина) существенно меньше другого — срединной длины контура ***S.*** Последняя в свою очередь намного меньше, чем длина стержня / (рис. 6.1).



Длина контура для тонкостенного стержня, представленного на рис. 6.1

$$s = h + 2b.$$

Следовательно, характерные размеры *тонкостенных стержней открытого профиля* взаимосвязаны и меняются в пределах $\frac{h}{s} > 10$ и $S >> 6$.

Основные положения теории тонкостенных стержней были даны С.П. Тимошенко. Полное и общее развитие эта теория получила в трудах В.З. Власова и потому обычно называется теорией Власова.

Тонкостенный стержень как расчетная схема сохраняет в себе основные свойства обыкновенного стержня, и формулы сопротив-

ления материалов, связанные с растяжением (сжатием), изгибом и кручением бруса, остаются в основном справедливыми.

Вместе с тем тонкостенный стержень в силу геометрических соотношений обнаруживает свойства, существенно отличающие его от стержней сплошного сечения. При некоторых видах загружения не соблюдается гипотеза плоских сечений, происходит, так называемая, депланация сечения за счет неравномерной деформации стержня вдоль его оси. Иными словами, не соблюдается *принцип Сен-Венана* — глубина «проникновения» краевых особенностей вдоль оси существенно больше, чем в сплошном стержне.

Вообще говоря, сравнительная оценка нормальных и касательных напряжений а и т в поперечных сечениях бруса при переходе от сплошного сечения к тонкостенному профилю существенно меняется, и этот вопрос требует особого изучения.

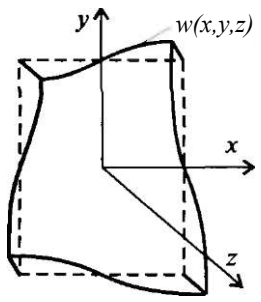


Рис. 6.2

При кручении тонкостенных стержней и вообще стержней с некруглым поперечным сплошным сечением, поперечные сечения плоские до деформации, искривляются по некоторой поверхности *w{x,y,z)* (рис. 6.2), что называется *депланацией* сечения. По характеру формирования депланаций сечения по длине стержня следует различать два типа кручения стержней: *свободное и стесненное.*

Если депланация во всех поперечных сечениях одинакова по длине стержня или иначе *w{x,y,z) = w(x,* у), т.е. она является постоянной и не зависит от z, то такое кручение называется свободным. При переменных депланациях по длине стержня кручение называется стесненным.

При свободном кручении в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения, а при стесненном кручении, наряду с касательными возникают и нормальные напряжения. Эффект от неравномерной депланации сечения по его длине наиболее существенен для стержней открытого профиля.

После определения полной системы внешних сил, заметим, что порядок вычисления напряжений и перемещений в тонкостенном стержне закрытого профиля при свободном кручении принципиально ничем не отличается от метода расчета обычных стержней [8]. Поэтому, здесь этому вопросу специальное внимание не уделяется.

6.2. Секториальная площадь

В дополнение к уже известным геометрическим характеристикам сечений (/'—площадь поперечного сечения; S_x, 5V — статические моменты сечения; J_x, J_v, Jxy — осевые и центробежный моменты инерции) введем ряд новых. Эти характеристики свойственны только тонкостенным стержням и определяются на основе понятия *векториальной площади.*

Рассмотрим срединную линию контура поперечного сечения (рис. 6.3). *Срединная линия* - это геометрическое ***место точек*** поперечного сечения, равноудаленно расположенных от контурных линий. Выберем на срединной линии начало 0 отсчета дуги 5 и из заданного полюса Р. Проведем два луча к концам элементарного отрезка ***ds.*** Удвоенную площадь треугольника ***PAB*** обозначают через ***d***со.

Очевидно, что

$$d(a = rds, \qquad (6.1)$$

где г — расстояние от полюса Р до касательной к линии контура в точке *А.*

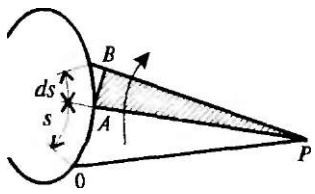


Рис. 6.3

Интеграл

$$\omega = \int_0^s r\,ds, \qquad (6.2)$$

называется секториальной площадью. Таким образом, *секториальная площадь* представляет собой удвоенную площадь, очерчиваемую радиус-вектором *РА* при движении точки *А* по контуру от начала отсчета 0 до некоторого значения дуги ***s.*** Если радиус-вектор вращается по часовой стрелке, приращение площади *d*со имеет знак плюс, против часовой стрелки — минус.

Точка *Р* называется *секториальным полюсом.*

При заданном полюсе и заданном начале отсчета в каждом конкретном случае может быть построена эпюра секториальной площади.

В качестве примера построим эпюру секториальной площади для контура, приведенного на рис. 6.4, *а.* Выбираем в качестве полюса точку Р, а за начало отсчета принимаем точку 0 (рис. 6.4, *а).*

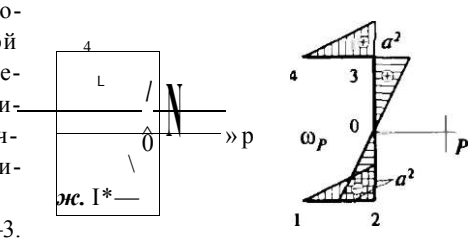


Рис. 6.4

Рассмотрим участок 0—3. На этом участке $0 < s < a.$ Вектор г вращается по часовой стрелке, следовательно, эпюра со имеет знак плюс:

$$coo\text{-}3 = +os; \quad co_0 = 0; \quad co_3 = a^2.$$

На участке 3—4, $0 < s < a$ вектор *г* вращается против часовой стрелки, т. е. приращение площади будет отрицательным:

$$co_{3_4} = a^2 - as; \quad ш_4 = a^2; \quad Ш4 = 0.$$

На участке 0—2, $0 < S < a$ вектор *г* вращается против часовой стрелки, т. е. приращение площади будет отрицательным:

$$co_{0_2} = -qs| \quad co = 0; \quad ш_4 = -a^2.$$

На участке 2—1, $0 < s < a,$ вектор *г* вращается по часовой стрелке, то есть приращение площади будет положительным:

$$Ю2\text{-}1 = -a^2 + C5; \quad co_2 = -a^2; \quad coj = 0.$$

Эпюра секториальной площади о приведена на рис. 6.4, б.

Отметим, что при переносе полюса секториальная площадь меняется на величины, линейно зависящие от координат x и $y,$ т.е.:

$$ю_0(5) = co'(i) - Y_c(x - x_0) + x_c(y - y_0), \qquad (6.3)$$

где cf>o(s) и co'C-5) — секториальная площадь относительно нового Pq и старого полюса P' соответственно; x_c, y_c, л^, y_0 — координаты центра изгиба и начала отсчета соответственно.

6.3. Секториальные характеристики и их определение

Наряду с общепринятыми, для тонкостенных стержней вводятся дополнительные характеристики поперечных сечений.

Секториально статический момент поперечного сечения

$$= \int_F Jco J/' = 6 \int_S Jcocte, M^4.$$

Секториально линейные моменты площади поперечного сечения

$$S(ox = \int_F]u>xdF = b]u>xds \text{ и } S_{tt>,} = \int_F J\,co\,y\,dF = Ъ \int_s co\,y\,ds, \text{ м}^5.$$

Секториальный момент инерции поперечного сечения

$$= \int_F Jco^2 dF = 6 \int_S Jco^2 <ft, \text{ м}^6.$$

Окончательные выражения секториальных характеристик, исходя из предположения, что толщина тонкостенного сечения по всему контуру постоянна и равна Б.

При поперечном изгибе или кручении всегда существует такая точка, относительно которой момент от касательных сил, возникающих в поперечном сечении, равен нулю. Эта точка называется *центром изгиба* или *кручения.* Для сечений, имеющих две оси симметрии, центр изгиба или центр кручения совпадают с центром тяжести.

Положение центра изгиба (или кручения) не зависит от действующих на стержень сил, а зависит только от формы и размеров поперечного сечения тонкостенного стержня.

При *стесненном кручении* центр кручения, а также начало отсчета секториальной площади не могут быть выбраны произвольно. Эти точки должны быть выбраны так, чтобы секториально линейные моменты, а также секториально статический момент были равны нулю, т.е.

$$\begin{aligned} {}^{\wedge}ux &= \int_F u x\,dF = Ь\ Jcoxds = 0; \\ {}^{\wedge}coy &= \int_F \text{®} y\,dF = 5\ jayds\ -0\ ; \\ \bullet S_m &= \int_F co\,dF = 8\ \int_S co\ ds + DF = 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Выполнение условий первых двух условий из (6.4) зависит только от выбора координат полюса. Выполнение же третьего из условий (6.4) зависит от выбора начала отсчета 0.

Эпюра со, построенная при полюсе, в качестве которого взят центр изгиба, и удовлетворяющая третьему уравнению (6.4), носит название эпюры *главной сектроиальной площади.*

Положение центра изгиба и секториальные характеристики сечения на практике определяются в следующей последовательности.

Сначала выбирается положение полюса Р и строится эпюра секториальной площади со' относительно полюса.

Далее определяются величины S_{w}-$_X$ и $S_{a,y}$ относительно полюса Р и вычисляются координаты центра изгиба по формулам

$$= \text{Ж} \quad \text{и} \quad , \quad _{>c} = \quad \text{У.} \tag{6.5}$$

Определяется секториальная площадь относительно центра изгиба по формуле (6.3) и вычисляется секториально статический момент поперечного сечения по формуле

$$\text{Ст}^{0} = 6\ \int_5 co_0 \quad ,$$

как площадь эпюры Юо, умноженную на 8.

Далее определяется постоянная *D* из третьего условия (6.4) по формуле

$$\text{£} = \frac{}{F} \qquad (6.6)$$

и строится эпюра главной секториальной площади

$$\text{ю} = \text{со}o + D. \qquad (6.7)$$

6.4. Общий случай нагружения тонкостенного стержня. Бимомент

В общем случае нагружения осевые перемещения сечения тонкостенного бруса можно представить в виде следующего выражения:

$$W = W_0 + (p_J, x + \langle p_x \rangle' - y\text{со}, \qquad (6.8)$$

где Wo, (p_x и фу характеризуют: смещение по продольной оси z; поворот сечения как жесткого целого относительно координатных осей x и *y,* у — удельный угол закручивания относительно продольной оси z; о — эпюра главной секториальной площади.

Нормальные напряжения в сечении, согласно закону Гука, в данном случае определяются согласно выражения:

$$\text{с} = \text{Ё}\frac{dw}{dz} = \text{Ё}\left(\frac{d\text{Vfi}}{dz} + \frac{Apy}{dz} + \frac{d(p_Y}{dz}\right)\text{со} \qquad (6.9)$$

С учетом последнего выражения, формулы по определению внутренних силовых факторов от нормальных напряжений с, примут вид

$$N = \text{\odE} = \int_F dz \qquad M_v = \text{\cxdF} = EJ_y \int_F dz$$
$$M_x = \text{\cydF} = EJ_X\text{-},B_W = \text{\G(0dE} = -EJ_a\text{ ^ .} \qquad (6.10)$$

Здесь через B_a обозначена новая силовая характеристика, называемая *бимоментом,* размерность которой будет кН $м^2$.

В результате совместного рассмотрения (6.9) и (6.10) выражение нормальных напряжений можно представить в следующем виде:

$$c = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y - \omega. \qquad (6.11)$$

Первые три слагаемых уже известные нам величины нормальных напряжений из курса «Сопротивления материалов» являются результатом действия продольной силы и изгибающих моментов. Что же касается четвертого слагаемого, то оно характеризует изменения, вносимые в линейные законы распределения напряжений, депланацией сечения, силовой мерой которой является бимомент.

Заметим, что *бимомент* является самоуравновешенным фактором и по методу сечений не может быгь определен. Следовательно, задача в общем случае нагружения тонкостенного стержня является статически неопределимой. Например, если нагрузить стержень двутаврового сечения четырьмя равными силами Р (рис. 6.5), бимомент в торцевом сечении будет равен

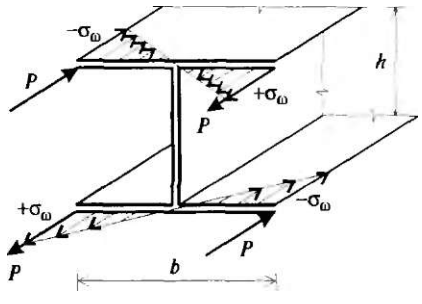


Рис. 6.5

$$B = \sum_{i=1}^{n} P_i \omega_i \qquad (6.12)$$

где (Oj — значение секториальной площали для точки приложения силы Pj, т.е.

$$P_i \omega_i = P_i \omega_i.$$

В этом случае, очевидно, что и продольная сила *N,* и изгибающие моменты M_x, M_y равны нулю.

Касательные напряжения в поперечном сечении стержня в общем случае нагружения слагаются из касательных напряжений поперечного изгиба, простого (свободного) кручения, и наконец, из вторичных касательных напряжений, возникающих за счет стесненного кручения:

$$\tau = \tau_x + \tau_y + \tau_{ш} + \tau \qquad (6.13)$$

Следовательно, в общем случае нагружения в поперечных сечениях тонкостенного стержня возникают следующие внутренние усилия: Q_x, Q_y — поперечные силы от касательных напряжений τ_x, τ_y; M_x, M_y — изгибающие моменты от нормальных напряжений σ_z;

$M_г$ — крутящий момент свободного кручения от касательных напряжений $т_г$; $B_ш$ — *бимомент* от действующих нормальных напряжений $ст_ю$, вследствие изгиба элементов тонкостенного стержня; $M_ю$ — *изгибно-крутящий момент* от дополнительных касательных напряжений $т_ю$.

Формулы для вычисления перечисленных факторов даны в табл. 6.1, где приняты следующие обозначения: и, v — перемещения линий центров изгиба сечений в направлении координатных осей x и y; S_x, S — соответственно, статические моменты относительно координатных осей и секториально статический момент отсеченной части сечения, расположенной по одну сторону от расчетной точки.

Таблица 6.1

Силовой фактор	Усилие	Напряжение
Поперечная сила Q_x, Q_y	$Q_x = EJ_y u'''$, $Q_y = EJ_x v'''$	$\tau_{xz} = \frac{Q_x S_y^S}{J_y S(x)'}$ $\tau_{xzy} \sim \frac{Q_y S_x^S}{J_x b(y)}$
Изгибающий момент M_x, M_y	$M_x = -EJ_x v''$ $M_y = -EJ_y u''$	$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$
Крутящий момент при свободном кручении тонкостенного стержня постоянной толщины стенки 5, Л/с	$M_z = GJ_{кр} y'$	$\tau = \frac{M_к}{J_{кр}} \delta$
Крутящий момент при стесненном кручении тонкостенного стержня постоянной толщины стенки 8, *К*	$M_ш = -EJ_ω y'''$	$\tau = \frac{M_ш}{J_ω} \omega$
Бимомент Д,	$B_ω = -EJ_ω y''$	$\sigma_ω = \frac{B_ω}{J_ω} \omega$

Все эти величины легко определяются, если известна функция y(z). Последняя может быть найдена из условия равенства суммы крутящих моментов стесненного и свободного кручения полному крутящему моменту:

л/ + м = $м_{кр}$. (6.14)

Подставляя в (6.10) значения $M_ш$ и M_y из табл. 6.1, получим

$$-EJ_0 y^m + GJ_{Kp} y' = M_{Kp}. \quad (6.15)$$

Дифференцируя (6.15) по *г,* имеем

$$EJ^{\wedge\prime V} \sim GJ_{Kp} r \qquad \frac{dM_{кр}}{dz} \quad (6.16)$$

или

$$y^{IV} - a^2 y'' = \frac{m}{E J'} \quad (6.17)$$

где $a = \frac{\backslash GJ}{EJ:}$ *кр* — *изгибно-крутильная характеристика* попе-

речного сечения стержня; т • $\frac{dM_{кр}}{dz}$ распределенный крутяшии момент.

Рассмотрим случай кручения, когда на свободном конце тонкостенного стержня, защемленного с другим концом, действует крутящий момент (рис. 6.6). В этом случае имеем

$$_y iv _ _a Y' = 0, \quad (6.18)$$

интеграл которого записывается

$$y(z) = C] \, chaz + C_2 \, shaz + C_3 z + C_4. \quad (6.19)$$

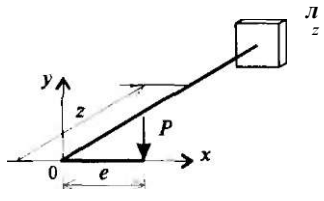


Рис. 6.6

Откуда имеем

$$y'(z) = a \, Q \, shaz + a \, C_2 \, chaz + Cj \, ;$$

$$y''(z) = a^2 \, C] \, chaz + a^2 \, C_2 \, shaz;$$

$$y'''(z) = a^3 \, C, \, shaz + a^3 \, C_2 \, chaz. \quad (6.20)$$

Для определения C\, C_2, C3 и C4 с учетом граничных условий

при z = 0, $Л/_y(0) = Pe$ и $B_a(0) = 0$;

при z = /, y(/) = 0 и y'(/) = 0, (6.21)

получим

$$C,\ =0: \qquad \boldsymbol{C}_2 \quad \frac{P\,e}{a\,GJ_{кр}\,,,\ cha/'} \qquad (6.22)$$

$$\boldsymbol{Pe} \qquad C_л = \frac{Pe\ \ sha/-a/cha/}{a\ GJ_{кр}\ \ cha/}$$
$$GJ_{кр}$$

Учитывая выражения произвольных постоянных (6.22) из (6.19) и (6.20), будем иметь

$$\begin{aligned} Y(z) &\quad \frac{Pe\ \ sha/ - shaz + a(z-/)cha/}{a\,GJ_{кр}\ \ cha/} \\ y'(z) &= \frac{Pe\ \ cha/-chaz}{GJ_{кр}\ \ cha/} \\ y''(z) &= -\frac{a\ Pe\ \ shaz}{GJ_{K}p\ \ cha/'} \\ y'''(z) &= -\frac{a^2 Pe\ \ chaz}{GJ_{Kp}\ \ cha/} \end{aligned} \qquad (6.23)$$

Здесь shx и chx - гиперболический синус и гиперболический косинус соответственно аргумента x

$$shx = \frac{e^{*} - e^{\ x}}{;}\ ;\ chx = \frac{e^{*} + e^{\ x}}{} \qquad (6\text{-}24)$$

Значения гиперболических функций при заданном аргументе приводятся в таблице 3.7.

В заключение, учитывая (6.23) и выражения усилий из таблицы 6.1, окончательно получим

$$\begin{aligned} My &= GJ\,y' = Pe\ \ 1 - \frac{chaz^4]}{cha/\ J'}. \\ \boldsymbol{B.„} &\quad -EJ_{ш}\,y'' = Pe\ \frac{shaz}{a\ \ cha/'} \\ M_{(S)} &= -EJ_{(S>}y''' \ = \ Pe\ \frac{chaz}{cha/} \end{aligned} \qquad (6.25)$$

Заметим, что существует полная аналогия в основных зависимостях теории стесненного кручения стержней открытого и замкнутого профилей. Основные расчетные зависимости теории расчета стержней замкнутого профиля можно получить, путем замены в приведенных выше зависимостях для расчета стержней открытого

профиля, уже известных нам секториальных координат и секториальных геометрических характеристик сечений со, и т.д., на обобщенные величины *со* , и т.д., для замкнутого профиля.

При этом, главная обобщенная секториальная координата со , для замкнутого профиля (рис. 6.7), определяется:

$$\omega = \omega - p5$$

где со = *(jrds = jrds* — секториальная координата, вычисляемая по аналогии теории стержня открытого профиля; г — длина перпендикуляра, опущенного из полюса *А,* взятого внутри контура, на касательную к контуру; $p = \frac{Q}{i_6}$ параметр, условно называемый «средним радиусом» замкнутого контура; П - удвоенная площадь, охваченная срединной линией контура ***s;*** $s = \frac{\int_0^s r\,ds}{J_6} = \frac{\int_0^s \omega\,ds}{J_6}$ приведенная длина дуги данной точки контура.

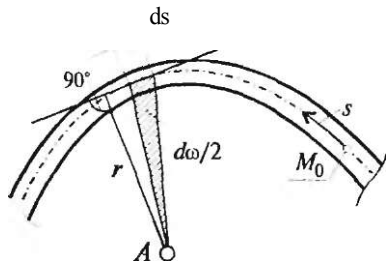


Рис. 6.7

Главный обобщенный секториальный момент сечения и секториальный статический момент S^ для замкнутого контура определяются по формулам:

$$S = S_{Tr} - D,$$

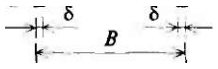
F

где ***= jtSdds;*** ***D***

Q

6.5. Расчет тонкостенного стержня открытого профиля (задача № 17)

Для тонкостенного стержня открытого профиля, изображенного на рис. 6.8, а, при следующих исходных данных: Н = 12.5-Ю"^{2} м; В= 19-10^2 м; / = 2 м; 5 = НО"^{2} м; Р= 1 кН; Е = 2-Ю^5 МПа; С7 = = 8-Ю^4 МПа, требуется:



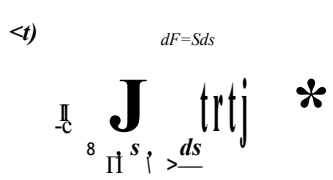


Рис. 6.8

1. Определить площадь, положение центра тяжести, главные центральные моменты инерции поперечного сечения.

2. Найти положение центра изгиба.

3. Определить момент инерции при чистом кручении J_{Kp} и секториальные характеристики сечения.

4. Вычислить изгибно-крутильную характеристику $a = \frac{GJ_{кр}}{EJ_{,}}$.

5. Построить эпюры поперечной силы Q_x, изгибающего момента My, момента чистого кручения M_v изгибно-крутящего момента M_a, бимомента $B_ш$.

6. Построить эпюры нормальных напряжений ст., $ст_ш$ и их суммарную эпюру.

Решение

1. Определение площади, положения центра тяжести и главных центральных моментов инерции

Вычислим расчетные размеры сечения стержня (рис. 6.8, б, в), приняв в дальнейших расчетах

$5 = 110"^2$м = const; $Ь = B-$ = 19• 1(Г^2 - 1 • 1(Г^2 =18 1(Г^{2}м;

$И = Н - \frac{5}{2} = 12.5 \cdot 10^{1} - \frac{ЫО"^2}{2} = 12\text{-}10^{>}$ м.

Тогда

$F = \int dF = I\ J6*fc = 1\ 5 \int d\,s = \int ds = 5S\text{-}s, = 6(6 + 2/») =$

$= 1 \cdot 10"^2 \cdot (18 \cdot 10"^2 + 2\text{-}12\text{-}10\sim^2) = 42 \cdot 10"^4$ м^2.

В выбранной системе координат определим положение центра тяжести сечения: $y_c = 0$; $x_c = \frac{S_y}{F}$

Для этого построим эпюру координат X\ (рис. 6.9, а) и вычислим статический момент сечения относительно оси y\

$$S_y = \int x\,dF = \int_s x_x\,ds = 1\,10^{.2}\ 2\text{-}12\text{-}10^{\sim 2}\ \ 12\text{-}10^{\sim 2} = 144 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Тогда координата центра тяжести сечения будет равна

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{144\text{-}10^{\prime\prime 6}}{42\text{-}10^{\prime\prime 4}} \approx 3.43 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Для вычисления главных центральных моментов инерции предварительно построим эпюру координат x и y (рис. 6.9, *б, в*). С применением этих эпюр, определяются:

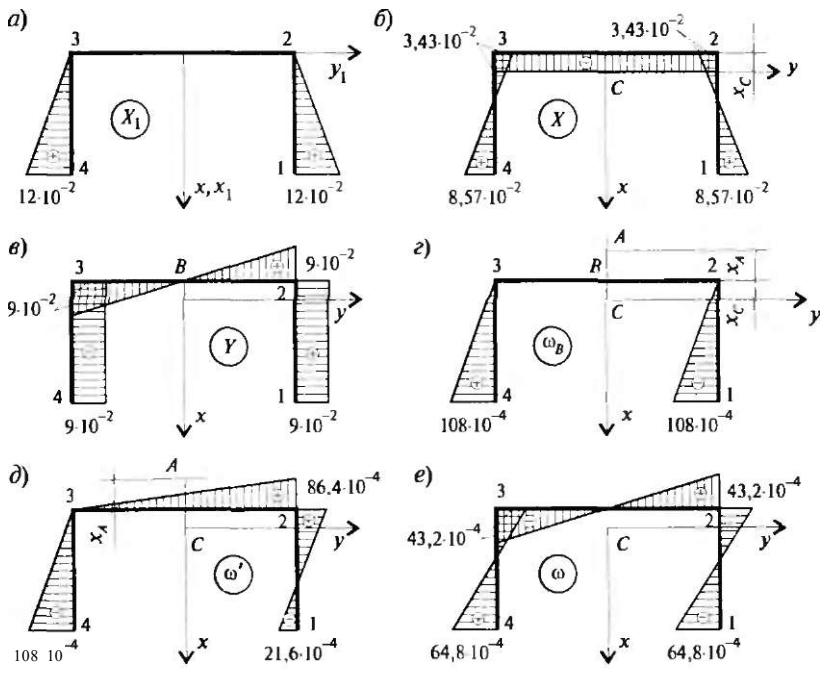


Рис. 6.9

$$J_x = \int_F y^2\,dF = 5\,Z \int_{i\ S:} y^2\,d\,s = 1\,1\,0"^2 f1\,2\quad 10\text{-}2\ \text{-}9\,1\,0\text{-}^2\quad 9\text{-}10\text{-}^2\ \text{-}2 +$$

$$9\text{-}10\text{-}^2\text{-}9\text{-}10\text{-}^2\quad 2\quad {}^{9\ 1\,q\,,\,2\ \ 2} = 2.43 \bullet 10"^5\ \text{м}^4;$$

$$2\qquad 3$$

$$/ \quad =_f \int x^l dF = 5\underset{<}{X}\ Jx^2 rfs =$$

$$1 \bullet 10"^2 \bullet [18 - lO"^2 \bullet 3.43 \bullet 10"^2 \bullet 3.43 \bullet 10"^2 +$$

$$12\ \ lO"^2 \text{-J2}(3.43 \bullet 10"^2 \bullet 3.43 \bullet 10"^2 + +8.58 \bullet lO"^2 \bullet +8.58 \bullet 10"^2) -$$

$$\text{-2} \bullet 3.43 \bullet lO"^2 \bullet 8.58 \bullet lO^{-2}]\,2\} = 6.583 \bullet 10"^6\ \text{м}^4.$$

2. *Определение положения центра изгиба*

Вначале построим эпюру секториальных координат площади $\omega_в$, в характерных точках (1, 2, 3, 4) профиля, выбрав произвольный полюс в точке *B* (рис. 6.9, *г)*

$$_{Ю1} = \text{-2-}\frac{J_\wedge}{2}\ 9\ \ Ю^{-2}\ \text{-12}\quad 10^{\ 2} = \text{-108-}10^{-4}\text{M}^2;\ \ CO_2 = o_3 = 0;$$

$$co_4 = 2 \bullet 2\,.\,9\,.\,Ю^{-2}\ \text{-12} \bullet 10\sim^2 = 108 \bullet Ю^{-4}\ \text{м}^2.$$

Координаты центра изгиба вычисляем по формулам (6.5).

Используя эпюры $\omega_д$ и y и применяя правило Верещагина, вычисляем секториально линейный статический момент

$$\text{ca>}_{,,} = \int_F \quad J_r = \quad {}^{*} = \overline{\cdot\ {}^{1\text{П}\cdot 2}10810"^2\text{-II-}10"^2}\ \ 9\text{-}10^{\cdot 2} \bullet 2 =$$

$$= \text{-116.64-}10"^8\text{M}^5.$$

Тогда координата центра изгиба по вертикальной оси принимает значение

$$J_x \qquad 2.43 \bullet 10"^5$$

Координата центра изгиба по горизонтальной оси вычисляется

$$Уа = \quad \mathbf{V}\ /\ \mathbf{V}$$

Так как эпюра x симметрична, а эпюра $\omega_в$ обратно симметрична относительно *x,* то по правилу Верещагина секториально-линейный статический момент равен нулю, т.е.

$$^{s}u_{B} = \int_{F} v_{B} x dF = 5 \times \int_{iS,} \omega^{x} ds = 0.$$

Следовательно, $y_A = 0$ и поэтому центр изгиба лежит на оси *x.*

Вычислим постоянную *D,* предварительно построив эпюру секториальных площадей ω' (рис. 6.9, *д).*

При этом полюс расположим в центре изгиба (т. *A).* За начало отсчета возьмем точку 3 (произвольно):

$$\omega_{3} = 0; \quad \omega'_{4} = 2 \cdot (-9 \cdot 10^{-2}) \cdot 12 \cdot 10^{-2} = 108 \text{ Нг}^{4}\text{м}^{2};$$

$$\omega_{2} = 2 \cdot \sim 4.8 \cdot 10^{-2} \cdot 18 \cdot 10^{-2} = 86.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{2};$$

$$\omega_{1} = 2 \cdot \frac{}{2} \cdot 4.8 \cdot 10^{-2} \cdot 18 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot \frac{}{2} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-2} = -21.6 \cdot \text{КГ}^{4}\text{ м}^{2}.$$

Постоянную *D* вычисляется по формуле (6.6):

$$D = \frac{\int \omega' dF}{F} \cdot \frac{\int \omega_i' ds}{F}$$

Далее вычисляем секториально статический момент $S_{(;)}$,, как произведение площади эпюры ω' на 8 :

$$= 1 \cdot 10^{-2} \{108 \cdot 10^{-4} \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot \sim + (86.4 \cdot 10^{-4} - 21.6 \cdot \text{ИГ}^{4}) \cdot | \cdot 12 \cdot 10^{-2} +$$

$$+ 86.4 \cdot 10^{-4} \cdot 18 - 10^{-2} 1 = 1814.4 \cdot \text{КГ}^{8}\text{ м}^{4}.$$

В этом случае величина постоянной *D* будет равна

$$_{д} = \frac{1814.4.10^{-4} 32 \quad 10^{2}}{42 \cdot 10}$$

Далее, используя зависимость (6.7), вычисляем секториальные координаты характерных точек профиля:

$$\omega_{1} = -21.6 \cdot 10^{-4} - 43.2 \cdot 10^{-4} = -64.8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{2},$$

$$\omega_{2} = 86.4 \cdot 10^{-4} - 43.2 \cdot 10^{-4} = 43.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{2};$$

$$\omega_{3} = 0 - 43.2 \cdot 10^{-4} = -43.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{2};$$

о)4 = 108 • 10~^{4} - 43.2 • Ю"^{4} = 64.8 • 10"^{4} м^2

По полученным координатам строим эпюру со (рис. 6.9, *е).*

3. Определить момент инерции при чистом кручении $J_{кр}$ и секториальные характеристики сечения

Для корытообразного профиля поперечного сечения бруса (рис. 6.8, б), имеем

$$\bullet>_{кр} \sim з \quad 12.5 \cdot 10\sim^2 \cdot (1 \cdot 10"^2) \cdot 2 + (19 \cdot Ю"^2 - 2\,1 - 1\,0"^2) \cdot (1 \cdot 10"^2)$$

$$= 15.68 \cdot 10"^8 \text{ м}^4.$$

Секториальный момент инерции $У_ш$ вычисляем по эпюре со (рис. 6.9, *е):*

$$/_ю = |\,со^z\,^\wedge = 5I\ Jco\wedge 5 = 1\text{-}10\text{-}\ ^{'}\ S,$$

$$12\text{-}10^{i\,2} \cdot 2\ (43.2\text{-}10\wedge)^2 + (64.8 \cdot 10' \qquad 2 \cdot 43.2 \cdot Ю^{-4} \cdot 64.8 \cdot 10\sim^4 12$$

а 3.7325 • Ю$^{-8}$ м^6 .

4. *Определение изгибно-крутильной характеристики а*

Изгибно-крутильную характеристику а вычисляем по формуле

$$a = \frac{\backslash GJjcp_ = 8\ \ 10^4\text{-}15.68\text{-}КГ^8}{EJ_{la} \quad \backslash\ 2\text{-}10^5\ \text{-}3.7325\ \text{-}10"^8} _\ 13м_,$$

5. *Построение эпюр поперечной силы Q_x, изгибающего момента M_y, момента чистого кручения M_y, изгибно-крутящего момента $M_ш$ и бимомента $B_ш$*

$$M_y = Pe\ ^\wedge\ \text{chaz} \quad {}_п\ D\ \text{shaz} \quad {}_n\ \text{chaz}$$

$$\text{cha/}, \quad {}_ш = \text{achaZ'}$$

В рассматриваемом примере

$$e = \frac{_2}{2} = \frac{19\text{—}10}{2} = 9.5\ \ 10^{\ 2}\text{м}; \qquad Pe = 1 \cdot 9.5 \cdot 10'^2\text{кН} = 95\ \text{Н};$$

a/= 1.3-2 = 2.6; cha/= 6.7690; a- cha/= 1.3 6.7690 = 8.7997 м"^{1}.

Тогда, согласно (6.25), получим

$Л/_{y} = 95\ (1 - 0.1477 \cdot chaz)$ (Н-м);

$В_{ю} = 10.8\ shaz$ (**н**-м^2);

$M_{ю} = 14.034\ chaz$ (Нм).

Предварительно разбив тонкостенный брус по длине на 5 равных частей, для этих сечений численные значения величин Q_x, My, M_y, M_a и B_a приведены в табл. 6.2.

По результатам табл. 6.2 строим эпюры Q_x, M_y, M_y, M_a и B_a (рис. 6.10). При этом в случае действия на брус сосредоточенной силы, во всех сечениях выполняется следующее условие: $M_y + M_a = Pe = const$.

Таблица 6.2

Z, м	a z	sha z	cha z	***а*с, Н**	***My*, Нм**	***M*$_y$, Н-м**	***м*$_a$, Н-м**	Д» Н-м^2
0.00	0.00	0.0000	1.0000	1000	0	80.97	14.03	0
0.40	0.52	0.5438	1.1383	1000	400	79.03	15.97	5.87
0.80	1.04	1.2379	1.5913	1000	500	72.67	22.33	13.37
1.20	1.56	2.2743	2.4845	1000	1200	60.14	34.86	24.50
1.60	2.08	3.9398	4.0647	1000	1600	37.96	57.04	42.56
2.00	2.60	6.6947	6.7690	1000	2000	0.00	95.01	72.32

6. *Построить эпюры нормальных напряжений* $с_г$, $с_ш$ *и их суммарную эпюру*

Нормальные напряжения зависят от внутренних силовых факторов *My* и B_a, согласно выражения (6.11). Опасным сечением является сечение в заделке, так как в нем действуют наибольшие по величине *My* и B_a (рис. 6.10, *в, д).* Нормальные напряжения от изгиба (рис. 6.11, *а)* определяем по формуле

$$\frac{M_{,,}}{J_y} \quad \frac{2000}{6.583 \cdot 10'} = -303.8 \cdot 10^6 \mathbf{X!}\ \text{Па} = -303.8\ x,\ \text{МПа}.$$

В точке 1: x, = 8.57-10"^{2} м, $o_{Z|} = -303.8\text{-}8.57\ 10"^2 = -26$ МПа.

В точке 2: Xj = -3.43-10"^{2} м, $a_{Z|} = -303.8\text{-}(-3.43\text{-}10"^2) = 11.94$ МПа.

В точке 3: Xj = -3.43-Ю$^{-2}$ м, $o_{Zj} = -303.8\text{-}(-3.43\text{-}10^{2}) = 11.94$ МПа.

В точке 4: x, =8.57-10"^{2} м, $o_{Z4} = -303.8\text{-}8.57\text{-}10"^2 = -26$ Мпа.

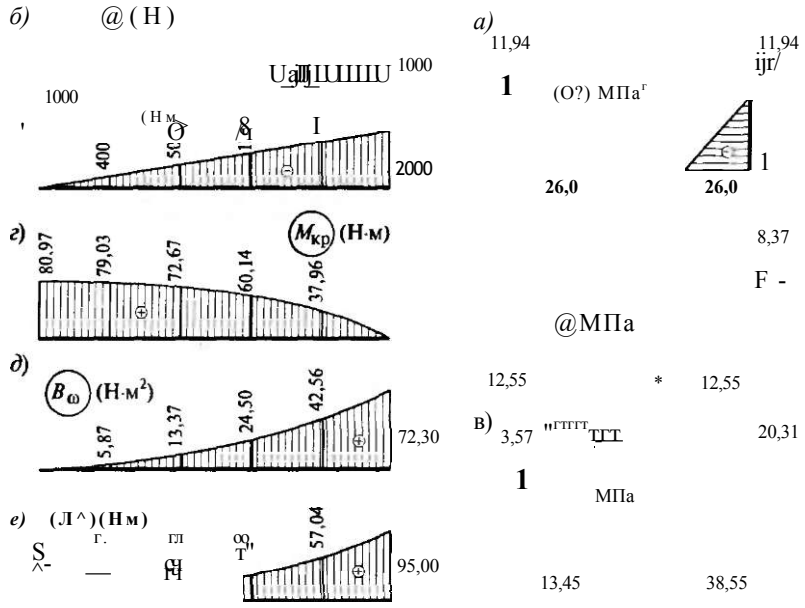


Рис. 6.10

Рис. 6.11

По найденным данным строим эпюру a_2 (рис. 6.11, *а*).

Нормальные напряжения в точках профиля от действия бимомента B_a вычисляем по формуле

$$\sigma_{Ш} = \frac{B}{W_{Ш}} = \frac{72.3}{3.7325 \cdot 10^{-8}} = 19.37 \cdot 10^{8} \text{ Па} = 1937 \text{ МПа}.$$

В точке 1: $\sigma_{Ш1} = 1937 \cdot (-64.8 \cdot 10^{-4}) = -12.55$ МПа.

В точке 2: $\sigma_{Ш2} = 1937 \cdot 43.2 \cdot 10^{-4} = 8.37$ МПа.

В точке 3: $\sigma_{Ш} = 1937 \cdot (-43.2 \cdot 10^{-4}) = -8.37$ МПа.

В точке 4: $\sigma_{Ш4} = 1937 \cdot 64.8 \cdot 10^{-4} = 12.55$ МПа.

По полученным данным строим эпюру $\sigma_ш$. Суммарные нормальные напряжения в опасном сечении тонкостенного стержня от

совместного действия изгиба и стесненного кручения вычислим путем сложения эпюр a_2 и $c_ш$ по формуле $_{ст} = a_г + c_ш$.

В точке 1: $= -26 - 12.55 = -38.55$ МПа.

В точке 2: $a_2 = 11.94 + 8.37 = 20.31$ МПа.

В точке 3: $c_3 = 11.94 - 8.37 = 3.57$ МПа.

В точке 4: $c_4 = -26 + 12.55 = -13.45$ МПа.

Суммарная эпюра нормальных напряжений с приведена на рис. 6.11, *в*.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение тонкостенного стержня как геометрической фигуры.
2. Что называется депланацией сечения?
3. Дайте пояснение, что такое свободное и стесненное кручение соответственно.
4. Дайте определение серединной линии поперечного сечения тонкостенного стержня.
5. Дайте определение понятия секторальной площади.
6. Какая точка называется секторальным полюсом?
7. Сформулируйте понятие секторально статический момент сечения, секторально линейный момент площади поперечного сечения и секторальный момент инерции поперечного сечения тонкостенного стержня.
8. Дайте пояснение понятия главной секторальной площади.
9. Дайте пояснение понятия бимомента.
10. Сформулируйте выражения перемещения, нормальные и касательные напряжения, возникающие при общем характере нагружения тонкостенного стержня.

ГЛАВА 7

ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ

7.1. Основные положения теории оболочек

Большинство элементов инженерных конструкций в расчетной схеме, подлежащих расчету на прочность, как это уже было отмечено, связаны с расчетом бруса, пластинок или оболочек.

Предыдущие разделы были достаточно подробно посвящены вопросам расчета стержней и стержневых систем. Настоящий раздел книги посвящен различным вопросам расчета пластинок и оболочек.

Под оболочкой понимается тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других. Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки, носит название *срединной поверхности.*

Если срединная поверхность оболочки является плоскостью, то такую оболочку называют *пластиной.*

Геометрическая форма объектов, которые могут быть причислены к оболочкам или пластинам, чрезвычайно разнообразна, в машиностроении — это корпуса всевозможных машин; в гражданском и промышленном строительстве — покрытия и перекрытия, навесы, карнизы; в кораблестроении — корпуса судов, сухих и плавучих доков; в авиастроении — фюзеляжи и крылья самолетов; в подвижном составе железнодорожного транспорта, кузова вагонов, цистерны, несущие конструкции локомотивов; в атомной энергетике — защитная конструкция атомных станций, корпуса реакторов и т.д.

Если срединная поверхность оболочки образует поверхность вращения в форме цилиндра, то оболочку называют *цилиндрической.*

К схеме *осесимметричной* цилиндрической оболочки сводится очень много инженерных конструкций, в том числе котлов, баков, нефтепроводов, газопроводов, деталей машин и др.

Задача о расчете тонкостенных оболочек вращения наиболее просто решается в том случае, когда возможно принять, что напряжения, возникающие в оболочке, постоянны по толщине и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует.

Теория оболочек, построенная в этом предположении, называется *безмоментной теорией оболочек.*

Если оболочка имеет резкий переход и жесткие защемления и, кроме того, нагружена сосредоточенной силой и моментами, то в местах крепежа оболочки, резких изменений формы, и в местах действия сосредоточенных сил и моментов возникают интенсивные напряжения, обусловленные *изгибным эффектом.* Учет изгибных эффектов можно получить в рамках *моментной теории оболочек.*

Следует отметить, что чем меньше отношение толщины И оболочки к ее радиусу ***R,*** тем точнее выполняется предположение о постоянстве напряжений по толщине и тем более точнее выполняются расчеты по безмоментной теории.

Отметим, что оболочка считается *тонкой*, если $\frac{}{R} < \frac{}{20}$.

Следовательно, при расчете на прочность тонких оболочек в зависимости от характера распределения внешних нагрузок, опорных закреплений, применяется или безмоментная или моментная теория. При этом предполагается равномерное распределение напряжений по продольным и поперечным сечениям оболочек (отсутствие в этих сечениях изгибающих, крутящих моментов и поперечных сил).

При осесимметричной нагрузке отсутствуют также сдвигающие силы. Определение усилий по безмоментной теории производится достаточно точно на расстоянии, превышающем величину (3+5)х х f R h от мест скачкообразного изменения формы или площади сечения, жестких контурных закреплений или от места приложения внешних сосредоточенных сил и моментов. Вблизи указанных мест возникают дополнительные напряжения от изгибного эффекта.

В моментной и безмоментной теории тонких оболочек или, так называемой, *технической теории оболочек,* состоящей в резком различии их толщины и габаритных размеров, влечет за собой возможность упрощения теории путем некоторой схематизации действительной работы конструкций. Эта схематизация формируется в используемых гипотезах, аналогичных гипотезам в теории стержней, т.е. гипотезам плоских сечений и гипотезам «ненадавливания» слоев оболочки друг на друга.

Эти гипотезы позволяют свести трехмерную задачу механики сплошной среды к двумерной, подобно тому, как в теории стержней трехмерная задача сведена к одномерной.

Далее в технической теории тонких оболочек пренебрегают членами h/R по сравнению с единицей.

Оболочки, к которым применимы упомянутые выше гипотезы, называются *тонкими,* а те, к которым эти гипотезы не применимы, называются *толстыми.*

Граница между тонкими и толстыми оболочками условна и определяется отношением $\frac{h}{} \sim \frac{1}{}$.

В тех случаях, когда $\frac{h}{R} > \frac{1}{20}$ для получения приемлемых результатов по точности применяется аппарат механики сплошной среды, в частности теории упругости или пластичности в зависимости от постановки задачи.

7.2. Изгиб тонкостенных симметрично нагруженных круглых пластин

Рассмотрим расчет пластины постоянной толщины И при действии внешних сил, перпендикулярных срединной плоскости и симметрично расположенными относительно оси *z* (рис. 7.1).

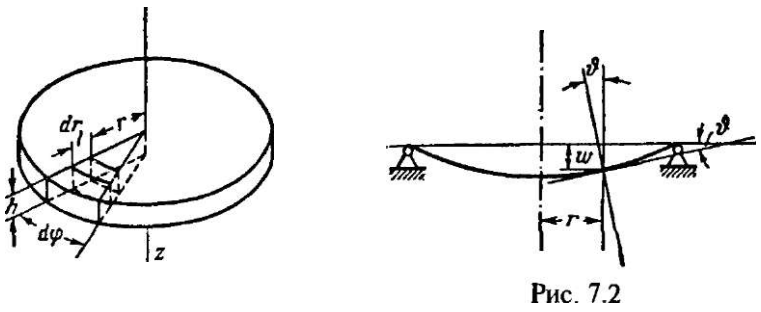


Рис. 7.2

В данном случае функции деформации, перемещения и напряжения, возникающие в пластине, будут также симметричны относительно оси *Z-*

Прогиб пластины w и угол поворота нормали $v = -\frac{dw}{ar}$ являются функциями только от радиуса г (рис. 7.2)

Из деформированной схемы (рис. 7.3) следует, что точки, расположенные на нормали *A\B\,* после изгиба образуют нормаль *A[B[,* совершая поворот на угол v. Соответственно нормаль A2B2 совершает поворот v+*dv* (рис. 7.3).

Радиальный отрезок *CD,* расположенный на расстоянии z от срединной поверхности приобретает абсолютное удлинение величиной

$z(v + Jv) - z \bullet v = Z \bullet dv$

Следовательно, относительное удлинение будет

$$\frac{dv}{dr} \qquad (7.1)$$

Учитывая, что до нагружения длина окружности, проходящей через точку С, была равна 2nr, а после нагруженйя в результате изгиба пластины она будет равна *2л(г + z v),* следовательно, относительное окружное удлинение приобретает значение

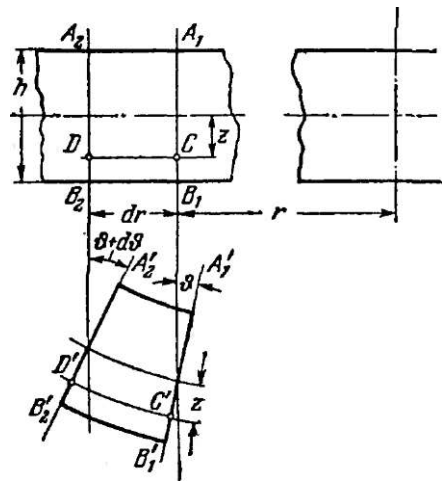


Рис. 7.3

$$^{E}\Phi = \frac{2\%(r + \quad - 2\,ш}{2пг} = z- \qquad (7.2)$$

В сечениях z = const, согласно гипотезы, гласящей об отсутствии давления между продольными слоями параллельных срединной плоскости, следовательно, нормальное напряжение $c_z = 0$ (рис. 7.4), а поэтому закон Гука в данном случае записывается в виде:

1

или если выразить напряжение через перемещения получим

$$^{C}\Phi = 7 \wedge 2\ К\ ^{+ЦЕ}0- \qquad (7.3)$$

E

1 - Р

С учетом (7.1) и (7.2) последние формулы можно представить в следующем виде:

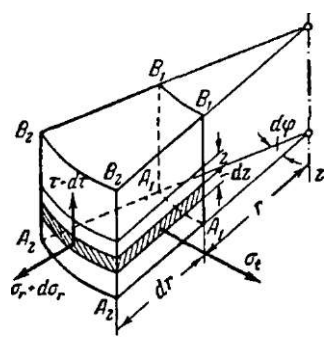


Рис. 7.4

$$E \cdot z \quad (\underline{dv} + \quad v$$
$$1 - ц \quad W r \qquad (7.47)$$
$$E \ z \quad f v \quad dv$$

Зная напряжения, можно определить равнодействующие моменты (рис. 7.5):

$$M_r = \quad = \quad ^ \quad +$$

(7.5)

$$Л/_ф \quad = \quad]a_\varphi z dz \quad = \quad l \{ _7 + V \overset{dv}{-}) ,$$

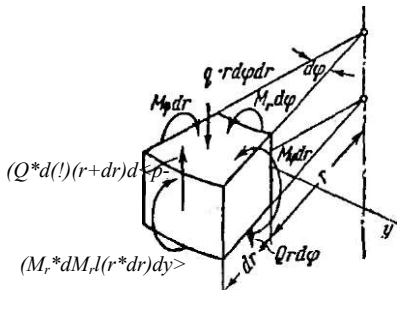


Рис. 7.5

где величина ***D*** называется цилиндрической жесткостью пластины и определяется:

$$D \qquad Eh' \qquad (7.6)$$
121

Проектируя все силы, действующие на выделенный элемент (рис. 7.5), на оси симметрии ***z,*** получим

$$(Q + dQ)(r + dr) \ \text{dtp} - Q \quad r \ \text{dtp} - q \cdot r \ d<p \ dz,$$

откуда

(7.7)

Далее возьмем сумму моментов от всех усилий (рис. 7.5) относительно оси ***y,*** касательной к дуге круга радиуса *г* в срединной плоскости:

$$[M_r + dM_r\hat{}r + dr)d<p - M_r r \ \text{dtp} - q \ r \ dr \ \text{d(p} \ — \ -$$
$$- Mydr \ dy + (Q + dQ)(r + dr)dy \ dz = 0,$$

и, пренебрегая малыми величинами, получим:

(7.8)

Остальные уравнения > выполняются тождественно, вследствие условий симметрии.

Полагая жесткость ***D*** постоянной и подставляя (7.5) в (7.8) получим

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,w^{*}\right)\right] = \frac{Qa}{D} \qquad (7.9)$$

После двукратного интегрирования выражения (7.9), получим

$$w^{*} = \frac{Qa}{D}\left(\frac{r^{2}}{4}\ln r + c_{1}\ln r + c_{2}\right) \qquad (7.10)$$

где и С2 — произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий задачи. Величина поперечной силы определяется из решения (7.7).

Сравнивая выражения (7.3) и (7.4), легко установить

$$\sigma_{\Phi} = \frac{E z}{1-\mu}\,\frac{M_{r}}{D} = \frac{E z}{1-\mu^{2}}\,\frac{M_{\nu}}{D} \qquad (7.11)$$

откуда следует, что наибольшие напряжения имеют место при $w^{*} = \pm\frac{h}{2}$:

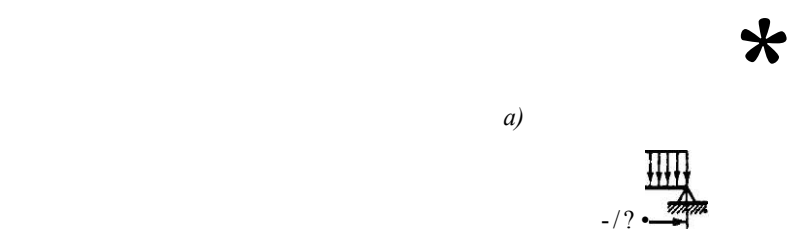
$$\sigma = \pm\frac{6 M_{r}}{h^{2}}\,. \qquad \frac{6 M}{h^{2}} \qquad (7.12)$$

7.3. Расчет плиты с жестко защемленным и шарнирно опертым контуром (задача № 18)

Принимая модуль упругости равным Е, коэффициента р, радиус пластины R, толщина *h* определить прогибы и напряжения в пластине, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой *д,* в двух случаях закрепления: при защемлении контура; при шарнирном опирании контура (рис. **7.6).**

Решение:

Для определения поперечной силы ***Q*** из центральной части пластины, независимо от характера ее закрепления. Выделим элемент с произвольным радиусом ***г < R*** (рис. 7.6).



а)

Рис. 7.6

Из условия равновесия выделенного элемента $Q \cdot 2\kappa г = q \cdot \kappa г^2$, получим

(7.13)

После двукратного интегрирования (7.10), с учетом (7.13), получим

$$V = \frac{C_1 r}{} + \frac{c_2}{г} - \frac{q r^3}{16 D} \qquad (7.14)$$

Независимо от характера закрепления пластин, угол поворота v в центре пластины, т.е. при г = 0 должен быть равен нулю. Данное условие выполняется только в том случае, когда $c_2 = 0$. Следовательно, (7.4) принимает вид

$$v = c_x г \quad 0] \qquad (7.15)$$
$$16 D$$

Для пластины с жестко заделанным контуром имеем

$$г = R, \quad v = 0. \qquad (7.16)$$

Подставляя (7.15) в (7.16), получим

$$= \frac{qR^2}{16 D} \qquad (7.17)$$

С учетом (7.17) из (7.15) окончательно получим

(7.18)

$$16DV \qquad I$$

Согласно выражениям (7.5), формулы по определению изгибающих моментов принимают вид

$$M\text{-}_{r} - \frac{ч}{16}\Big| R \qquad (7.47)$$
$$м_{\theta}\text{ф} - \frac{q}{16}\Big| R$$

Далее, интегрируя v из (7.18), находим формулу по определению прогиба плиты

$$и> = \frac{Я}{16D}\,{}^{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{И}{4}$$

где постоянное интегрирование сз определяется из условия w(i?) = O

и соответственно

(7.21)

Для пластины шарнирно опертым контуром имеем, что M - 0. Следовательно, согласно первому выражению (7.5), имеем

$$\frac{dv}{dr} + ц\,\frac{v}{г} = 0. \qquad (7.22)$$

Подставляя (7.15) в (7.22) и принимая $г = R$, получим

$$C_{1} \qquad 16D \quad 1 + ц'$$

С учетом последнего выражения, (7.15) принимает вид

$$v = \frac{д\ \overline{(3 + ц}}{16/Н1 + Ц}\ R\,{}^{2}r - r\ \ з] \qquad (7.23)$$

С учетом (7.23), выражения изгибающих моментов из (7.5) принимают вид

$$" Ж " {}^{1}) \qquad (7.24)$$
$$Зр\ {}_{г}2$$

Из (7.23), выражение прогибов принимает форму

$$w = \frac{C_3^{-1}}{16D}\left[3+\mu - R^2 r^2 - \frac{r^4}{h}\right]$$

где произвольная постоянная сз определяется из условия $w(R) = 0$:

$$C_3 = \frac{R^4}{16D}\left(\frac{5+\mu}{1+\mu} - \frac{2}{1+\mu}R^2 + \frac{1}{4}R^4\right).$$

и, следовательно, окончательно будем иметь

$$w = \frac{R^4}{16D}\left(\frac{5+\mu}{1+\mu} - \frac{2}{1+\mu}r^2 + \frac{1}{4}r^4\right). \qquad (7.25)$$

Согласно выражениям (7.19) и (7.24), эпюры изгибающих моментов приобретают формы, изображенные на рис. 7.7.

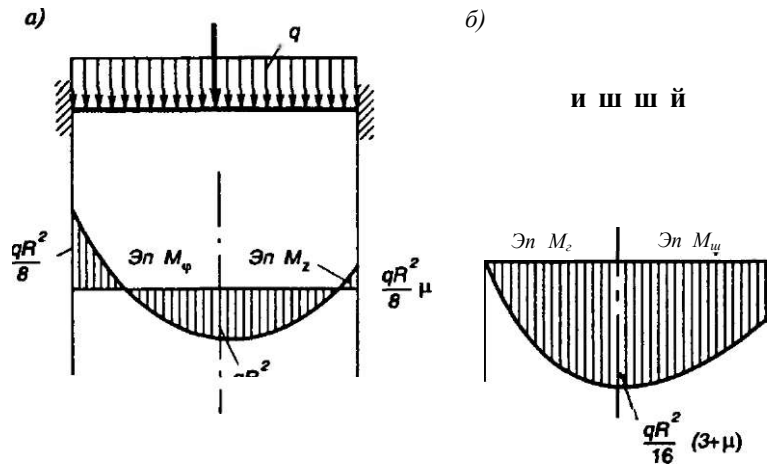


Рис. 7.7

В случае защемленного контура наибольшие напряжения возникают у верхней поверхности вблизи контура:

$$\sigma_{r,} = \sigma_{\text{ст}} = \frac{qR^2}{\Pi^2}\left(\frac{L}{}\right) \qquad MR^2 \qquad (J, = 0.$$

Из (7.21) наибольший прогиб имеем при г = 0:

$$w_{max} \quad \frac{M l}{64/)}.$$

Для платины с шарнирно опертым контуром, наибольшие напряжения возникают в центре на нижней поверхности конструкции:

Наибольший прогиб возникает при **г = 0:**

$$W_{max} = \frac{5 + p}{1 + p}\frac{gR^*}{64D}$$

7.4. Расчет пластины, нагруженной сосредоточенной силой (задача № 19)

Для круглой пластины радиусом ***R,*** постоянной толщины ***И,*** модуль упругости материалов Е, коэффициент Пуассона ц, защемленной по контуру (рис. 7.8, а) при действии сосредоточенной силы в центре величиной Р. требуется определить эпюры изгибающих моментов, прогиб и наибольшие напряжения.

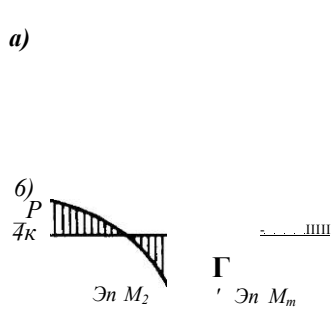


Рис. 7.8

Решение

Из условия равновесия выделенного элемента из центральной части пластины с произвольным радиусом г получим $Q = \frac{P}{2\,кг}$

Подставляя выражение ***Q*** в (7.10) определим:

$$v = c|r + \frac{c_2}{г} - \frac{P}{4KD}\, г \ln\frac{г}{R}.$$

В центре пластины при г = 0 имеем v — 0. С учетом $\lim_{/\bullet->0} г \ln\frac{}{R} = 0$, получим Q = 0-

Произвольная постоянная c_4 определяется из граничного условия закрепления плиты, т.е. *v(R)* = 0. Отсюда следует, что *c* = 0. Следовательно,

$$v = \frac{}{4\,\%D}\, г \ln\frac{R}{}.$$

Согласно (7.5), выражения изгибающих моментов приобретают форму:

$$M_r = \frac{P}{4\pi c}(1+\mu)\ln\frac{a}{r_0} - 1$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}(1+\mu)\ln\frac{a}{r_0} - \mu$$

Эпюра, построенная по этим формулам, представлена на рис. 7.8. б, откуда следует, что в центре пластины как и поперечная сила, так и изгибающие моменты обращаются в бесконечность. Однако учитывая, что в реальности сосредоточенная сила не существует, можно предположить, что отмеченные особенности являются условными, т.е. при реальном характере нагружения поперечная сила и изгибающие моменты принимают лишь экстремальные значения.

Для определения прогибов, интегрируя последнее выражение v, получим

$$w \quad \frac{Pr^2}{8\pi D}\ln\frac{R}{r} +$$

С учетом = 0 , получим

$$w \quad \frac{P}{8\pi D}(R^2 - r^2) - r^2 \ln\frac{R}{r}$$

В центре, т.е. при r = 0, получим:

$$w_{max} = \frac{PR^2}{16\pi D}$$

7.5. Изгиб с прямоугольным очертанием по контуру тонкостенной пластины

Рассмотрим изгиб пластины толщиной ***h,*** шириной ***a,*** длиной Ь в декартовой системе координат от действия распределенной нагрузки ***q*** (рис. 7.9) при различных контурных условий закрепления.

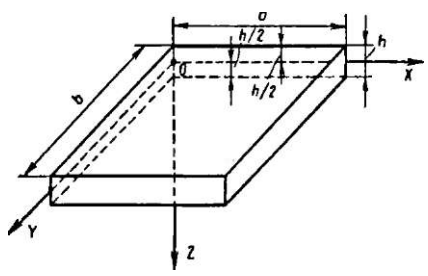


Рис. 7.9

На рис. 7.10 представлен выделенный элемент пластины и показаны положительные направления

внутренних усилий Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}.

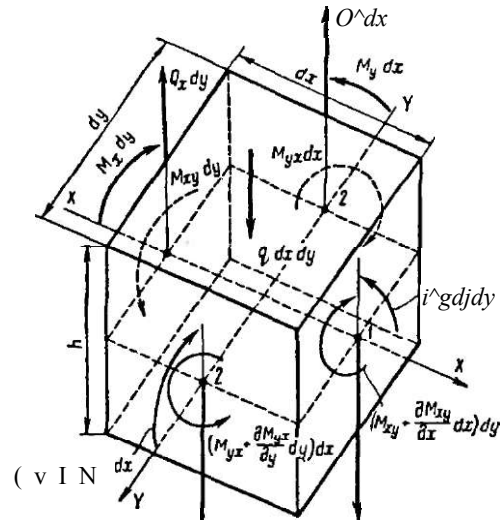


Рис 7.10

Составляя сумму всех сил, действующих на выделенный элемент по направлению вертикальной оси z, получим

$$qdxdy + \frac{\partial Q_X}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial Q_X}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g = 0. \qquad (7.26)$$

Далее, составляя условия в форме суммы моментов относительно координатных осей x и y соответственно, получим:

$$\frac{\partial M_{XY}}{\partial x} dx\ dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dy \qquad \left| \frac{dQ_y}{\partial y}\ dydx \right. \quad 42$$

$$\frac{\partial MYX}{\partial y}\ dy\ dx \qquad \left(\frac{\partial Mx}{\partial x} \right. \qquad \left| \frac{\partial Q_X}{\partial_X}\ dx\ dy \right| \frac{dx}{2}$$

Пренебрегая малыми величинами более высокого порядка и имея в виду, что Мху = Муу., последнее выражение преобразуется в форме:

$$Q_v = \quad ** \quad \frac{\partial M_y}{\partial x}$$

$$Q_x \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad \frac{8\mathrm{M_x}}{\partial x} \qquad (7.47)$$

Внося выражения Q_x и Q_y в (7.26), получим

$$\frac{8^{r}\mathrm{M_x}}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial y'} \qquad (7.28) = \quad -q-$$

В основу теории расчета тонких пластин легли следующие основополагающие гипотезы:

1. Нормали к срединой плоскости пластины (с—с) в процессе деформирования конструкции остаются прямыми перпендикулярными к изогнутой срединной поверхности (рис. 7.11).

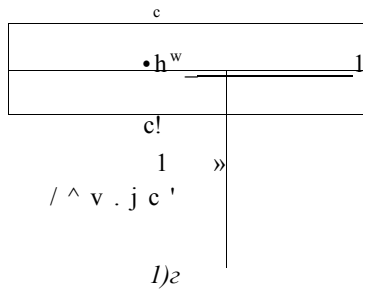


Рис. 7.11

Рассматриваемая гипотеза является по существу обобщающей гипотезой плоских сечений, принятой в теории изгиба балок.

2. Длина линейных размеров плиты по оси z остается неизменной, т.е. $\frac{dw}{} = 0.$

3. Взаимное продавливание между продольными слоями пластины отсутствует, т.е. $a_z = 0$.

4. Перемещения и, v точек, принадлежащих к серединной плоскости по координатным осям x и y по сравнению с прогибом и> малы, поэтому ими пренебрегают: $u(x, >>,0) = v(x, y,0) = 0$.

Данное предположение с учетом первой гипотезы позволяет записать:

$$u \quad \frac{dw}{\partial x} \qquad v = \quad \frac{dw}{\partial y} \qquad (7.29)$$

С учетом (7.29) линейные и угловые деформации определяются:

$$\begin{array}{ll} \sim & \frac{du}{dx} \quad -z\frac{d^2w}{dx^2}, \\ - & \frac{dv}{dy} \quad -*_1\frac{d^2w}{dy^2} \\ {}' xy & \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \quad 2\frac{d^2w}{dxdy} \end{array} \qquad (7.47)$$

Обобщенный закон Гука, в данном случае с учетом (7.30), записывается в следующем виде:

$$\begin{array}{l} \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \mu\frac{d^2w}{dy^2}\right) \\ \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2w}{dy^2} + \mu\frac{d^2w}{dx^2}\right) \\ \frac{Ez}{1+\mu}\frac{d^2w}{dxdy} \end{array} \qquad (7.31)$$

Далее, принимая во внимание (7.31) и (7.27), последовательно определим выражения моментов M_x, M_y, $M^{\wedge}$ и поперечных *сил* Q_x, Qi

$$\begin{array}{l} M_X = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z\,dz = -D\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \mu\frac{d^2w}{dy^2}\right) \\ My = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz}\,dz = -D\left(\frac{d^2w}{dy^2} + \mu\frac{d^2w}{dx^2}\right) \\ Mxy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z\,dz = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,dy} \end{array} \qquad (7.32)$$

и

$$\begin{array}{l} Qx = D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right) = -D\frac{d}{dx}\nabla w; \\ \left(\frac{d^2w}{dy}\right)\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right) = -D\frac{d}{dy}\nabla w, \end{array} \qquad (7.33)$$

где $V = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^1}$ — линейный дифференциальный оператор Лапласа.

Подставляя (7.33) в (7.26) и после ряда преобразований окончательно получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{d^* w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad VVw = \frac{}{D} \tag{7.34}$$

Это и есть известное дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины, полученные Софи Жермен в 1811 году. Оно является неоднородным бигармоническим уравнением.

7.6. Примеры расчетов тонкостенной пластины (задача № 20)

Определить функции прогибов рассматриваемых пластинок.

7.6.1. Цилиндрический изгиб тонкостенной пластины

Пусть прямоугольная пластинка, имеющая размер ***а*** по оси x, существенно меньше размера ***Ь*** по оси ***y,*** и подвергается действию нагрузки ***q*** = (рис. 7.12).

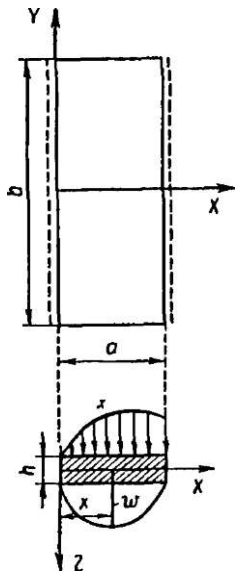


Рис. 7.12

Если характер закрепления краев пластинки по оси ***y*** одинаков, то его срединная плоскость в результате изгиба будет искривляться по цилиндрической поверхности. При этом $\frac{}{\partial y} = 0$. В данном случае уравнение (7.34) преобразуется и приобретает вид:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} \quad \Phi) \tag{7.35}$$

Очевидно, что решение задачи в данном случае существенно упрощается. Например, для пластинок характер закрепления которых изображен на рис. 7.13, для случаев а) и б) соответственно имеем:

$$/\ a^2 \cdot \overline{X^2 \quad a} X^3 + \overline{1} X^4$$
$$4 \quad 6 \quad 24 \qquad (7.47)$$

$$4^x) = \bullet it\, x - ax^3 + \frac{1}{2} x^4$$
$$12D \setminus 2$$

а)

м *SlY i*

I ,

<?<гН

5)

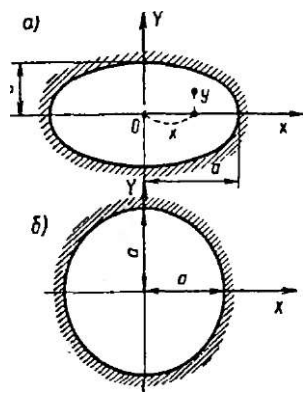
*Оо*Ж

Рис. 7.13

7.6.2. Эллиптическая пластинка, защемленная по краям прн действии равномерно распределенной нагрузки

Для эллиптической пластинки, защемленной по контуру (где должны выполняться условия $w = \frac{dw}{Эх} = \frac{dw}{\partial y} = Ц$), загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 7.14, *а),* решение уравнения (7.34) можно представить в форме:

$$w(x,y) \qquad \Gamma_{X^2} + у \qquad (7.37)$$
$$W$$



Подставляя (7.38) в уравнение (7.34) и принимая x = *y* — 0, определим выражение произвольной постоянной с:

$$c = \frac{а^4 Ь^4}{W \quad ъ(a^2 + b^2) \quad -(2abf}$$

Рис. 7.14

Для случая круглой пластинки (рис. 7.14, *б) b = a* из (7.37), получим

$$w \quad \frac{Я}{64\,D}^{2} + У^{2} - a^{2}) \cdot$$

Имея выражение w, далее можно определить все усилия.

7.6.3. Шарнирно опертая по краям прямоугольная пластинка при действии синусоидальной нагрузки

Пусть прямоугольная пластинка (рис. 7.15), шарнирно опертая по краям, подвергается действию нагрузки

$$o \qquad X \qquad \text{ф}, >'') = Яо^{sin} \frac{ux}{a} \tilde{s}in^{n}\text{y} \cdot \qquad (^{7}\text{-}^{39})$$

Обеспечивая 1раничные условия закрепления пластины, при

$$x = 0;\ x = 0;\ y = 0;$$

$$\frac{d^2w}{dx^L} \quad \frac{d^2w}{\partial y^1} = 0,$$

решение (7.34) можно представить в следующем виде:

Чо
Рис. 7.15

$$w(x, >>) = w_0 \cdot \sin\frac{7tX}{a} \cdot \sin\frac{7tV}{b}. \qquad (7.40)$$

Подставляя (7.40) в исходное уравнение (7.34), определим

$$w_n = \qquad (7.41)$$

7.7. Расчет прямоугольных пластин с шарнирно опертым контуром при действии произвольной поперечной нагрузки

Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую по контуру пластину, нагруженную произвольной поперечной нагрузкой *q(x,y)* (рис. 7.16).

Учитывая, что функция прогиба пластины должна удовлетворять дифференцированному уравнению (7.34) и граничным условиям на краях (7.19), т.е.

при x = 0; x = *a,* 0 < *y* < *a*\ 0 < *x* <*a,* j/ = 0, *y* = *b*\

$$w = \frac{8^2 W}{to^*} \quad \frac{8^2 W}{dy^2} \quad 0. \qquad (7.42)$$

Поскольку точное аналитическое решение уравнения (7.34) определить невозможно, поэтому чаще всего функция прогибов находится в виде бесконечного ряда. Для пластины с шарнирно опертым контуром решение уравнения (7.34), удовлетворяющее граничным условиям задачи (7.42), записывается в виде:

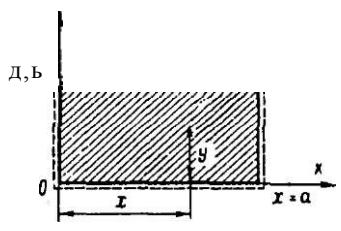


Рис. 7.16

$$\sum_{n=lm=l}^{\infty\ \infty} \sin \frac{\overline{nnx}}{a} \sin \frac{\overline{mny}}{Ъ} \qquad (7.43)$$

где A_{nm} — коэффициенты ряда, являющиеся постоянными величинами; п, т — целые положительные числа, соответствующие номеру членов ряда и характеризующие число полуволн синусоиды в разложении (7.43).

Для определения коэффициентов A_{nm} разложим функцию нагрузки q(x,y) в двойной тригонометрический ряд по синусам

$$q(x,y) = \sum_{л=1/п=1} X \text{ Sin } \frac{\overline{FIJVC}}{\circ} \text{ Sin } mny \qquad (7.44)$$

Коэффициенты этого ряда q_{nm} определяются по теории радов Фурье:

$$Qnm = \frac{4}{ab} \int_{oo}^{} \int (\text{ф} \cdot У) \sin \frac{\overline{nkx}}{a} \cdot \text{Sin} \frac{mny}{b} \, d x \, dy. \qquad (7.45)$$

Подставляя выражения (7.43) и (7.44) в уравнение (7.34), и после ряда преобразований находим

$$n^4 D \left[\left(\frac{}{a} \right)^2 + \left(\frac{}{Ь} \right)^2 \right] \qquad (7.46)$$

Обобщенное выражение для прогибов пластины опертой по контуру при произвольном характере нагружения *q(x,y),* с учетом (7.46) из (7.43) принимает вид:

$$\text{«> =o Ч}_{mn}\ \text{Sin}\ \frac{nnx}{a}\ \text{Sin}\frac{mny}{b}\text{i-} \qquad (7.47)$$

$$\Pi\ D\ n=lm=l \qquad {}^{2}\ {}'\text{m}*^{2}$$

$$\text{O}^{\text{I}}\ {}^{+1}\ —$$

Рассмотрим различные случаи нагружения пластины. При действии по всей поверхности пластины равномерно распределенной нагрузки q = const из (7.45), сначала определим

$$\text{Яшп}\quad \frac{4q}{abi}\int_{a}^{a_2}\sin\frac{nnx}{a}\,dx\int_{i}^{b}\sin\frac{mny}{b}\,dy = \frac{16q}{\text{п}\ \text{г}\ \text{п}\ \text{т}\ i} \qquad (7.48)$$

(и, т = 1,2,3…),

далее из (7.47) будем иметь

$$\text{w}(*,>>) = \frac{16}{\text{n}^{\epsilon}\text{D}}\sum_{\text{л}=1}^{\infty}\sum_{\text{г}=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{nnx}{a}\sin\frac{mny}{b}}{nm\left[\left(\frac{\text{л}}{a}\right)^{2}+\left(\frac{\text{и}}{b}\right)^{2}\right]^{2}} \qquad (7.49)$$

Отметим, что ряд (7.49) быстро сходится. Например, для максимального прогиба в центре квадратной пластины (а = Ь) уже при четырех членов ряда получаем точное значение:

$$\text{w}_{max} = 0,00406^{\wedge}.$$

Далее рассмотрим действие нагрузки равномерно распределенной по площадке прямоугольника со сторонами e n d (рис. 7.17). Обозначим координаты центра грузового участка по x и y соответственно а и р.

Определим:

$$Яп_{m}=\sim\ \frac{4q}{ab}\int_{\text{a}-\frac{c}{2}}^{\text{a}+\frac{c}{2}}\sin\frac{nnx}{a}\,dx\int_{\text{P}-\frac{d}{2}}^{\text{P}+\frac{d}{2}}\sin\frac{mny}{b}\,dy = \frac{16\text{o}}{n^{2}nm}\sin\frac{nna}{a}\sin\text{илВ}\sin\frac{nnc}{la}\sin\frac{nnd}{2b} \qquad (7.50)$$

Например, если $\text{c} = \frac{}{2}$, $d = b$, $\text{a} = \frac{}{4}$, $\text{P} = \frac{}{2}$ выражение q_{nm} приобретает вид:

$$< nm \quad \frac{16\,q}{n^{j}_{nm}} \sin \frac{2\,nn}{4} \sin \frac{\bullet \overline{{}_{2}\,mn}}{2}.$$

Для выполнения практических расчетов, подставляя формулы по определению q_{nm} в (7.46) определяется A_{nm}. Далее по (7.49) определяются прогибы пластины, а по (7.32) и (7.33) усилия, возникающие в поперечных сечениях конструкции.

В заключение рассмотрим расчет пластины при действии сосредоточенной силы величиной P в точке $x_P = a$, $yp = (3$ (рис. 7.18).

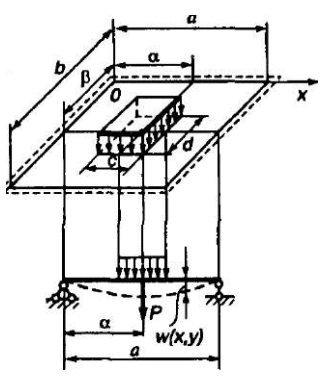


Рис. 7.17

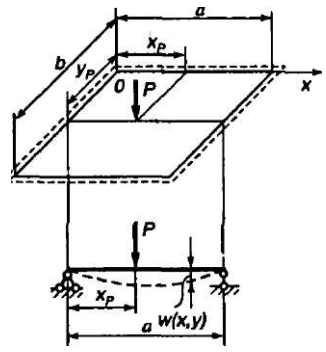


Рис. 7.18

В данном случае для получения решения следует в (7.50) устремить c и d к нулю, сохраняя конечное значение $P = q\ c\ d$. Подставляя $q = \overline{cd}$ и перейдя к пределу, получим

$$q_{nm} = \frac{4p}{ab} \cdot \overline{\sin \frac{nnx}{a}} \cdot \sin \frac{mny_p}{}$$

Если принимать $x_p = \frac{o}{}$; $y_p = \frac{b}{}$, то прогиб пластины определяется по формуле

$$w = \frac{4\ P}{n^{H}abD} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{nn}{a} \sin \frac{ГШ}{b} \cdot \sin \frac{\overline{nnx}}{a} \sin \frac{\overline{mny}}{} \qquad (7.51)$$
$$cu \qquad \backslash b.$$

где индексы п, т являются четными числами.

Для квадратной пластины $a = b$, $x = y$- ~ из последней формулы получим

$$w_{max} \quad \frac{4Pa^2}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \qquad (7.52)$$

Удержав первые четыре члена последнего ряда, т.е. п =1,3 и т =1,3 находим: $w^{max} = \frac{0.01 \cdot 2a^2 P}{D}$, что на 3% отличается от точного решения: $w^{max} = \frac{0.01160a^2 P}{D}$

7.8. Расчет сферической оболочки вращения

Для расчета применим безмоментную мембранную теорию тонких оболочек. При этом будем предполагать, что оболочка имеет плавно изменяющуюся непрерывную поверхность. Постоянная нагрузка интенсивностью ***q*** приложена на наружную поверхность оболочки.

Геометрия оболочки вращения (рис. 7.19) характеризуется следующими величинами: ***R*** — радиус основной оболочки; ***r(t)*** — радиус горизонтального сечения оболочки на расстоянии ***z*** от ее вершины; /?i — радиус кривизны оболочки по меридианному направлению; ***Rj*** — радиус кривизны дуги ***ab*** длиной ***dsj-***

Как это следует из рис. 7.20, ***a,*** имеем

$$R_2 = \frac{r}{\sin \varphi}, \qquad (7.53)$$

где ф - угол между радиусом R_2 и осью *Z*-

Обозначая меридианное и окружное погонное усилия соответственно *dNj (i* = 1, 2), действующих на отрезок ds_2 и ds\, можем записать

$$dN_x = N ds_2, \qquad dN_2 = N_2 ds_1, \qquad (7.54)$$

где N_x и N_2 - соответственно погонные меридианное и окружное нормальное усилия.

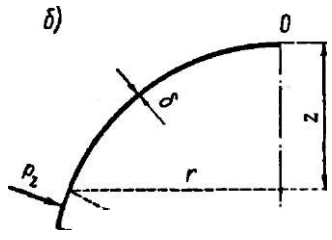


Рис. 7.19

Составляя сумму проекций всех усилий, действующих на выделенный малый элемент (рис. 7.20, *а)* по направлению ее нормали v получим

$$q_z ds_1 ds_2 + dN_1 \wedge - + d N_2 \wedge - = 0. \qquad (7.55)$$
$$R?$$

С учетом соотношения (7.53) и (7.54) из (7.55), получим

$$\frac{Ni}{K_1} + \frac{N_?}{K_2} = -Q_z = Я \cos\varphi. \qquad (7.56)$$

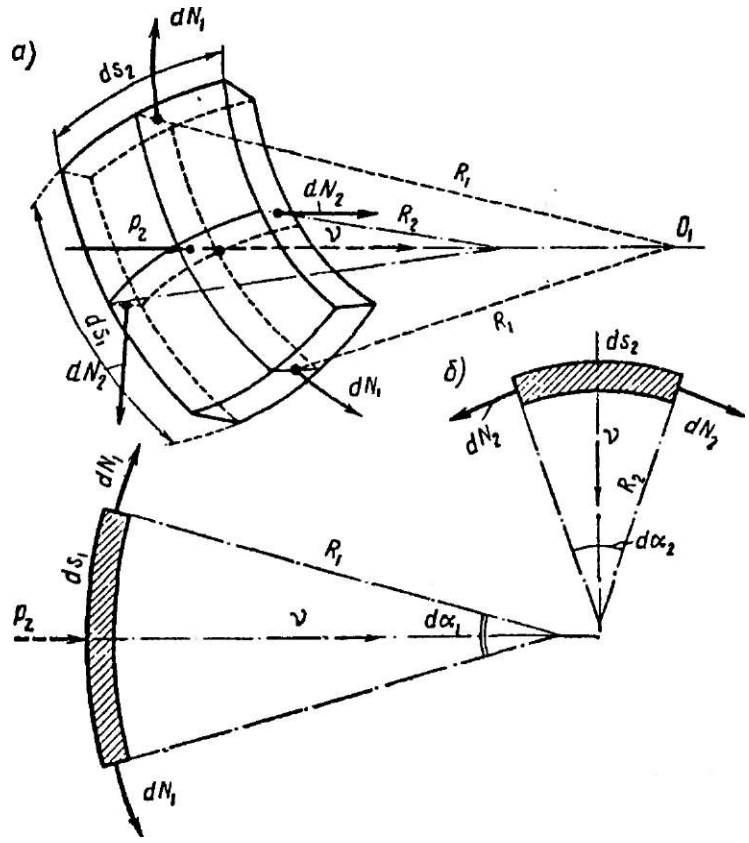


Рис. 7.20

Для определения второго необходимого уравнения проведем горизонтальное сечение оболочки вращения радиусом г (рис. 7.20, б) и спроектируем все силы, действующие на верхнюю отсеченную часть, на вертикальную ось *Z*-

$$N, \quad =-\bullet \frac{qF}{2\,\mathrm{n}\,\mathrm{r}\sin\phi} \tag{7.57}$$

Здесь F— площадь поверхности выделенной части оболочки.

Подставляя (7.57) в (7.56), определим:

$$N_2 = (F - nR_x r \sin 2\phi)\, \frac{\mathrm{R\ i\ q}}{\text{,”InR^r sin } \phi} . \tag{7.58}$$

7.9. Пример расчета симметричной оболочки вращения (задача № 21)

Определить эпюры усилия Л[7], и N_2 *для сферического* купола (рис. 7.21, а) при действии вертикальной равномерно распределенной нагрузки по ее поверхности интенсивностью q, принимая радиус сферы, равный *R* (рис. 7.21, *б).*

Решение

Учитывая, что для сферы = R_2 = R определим площадь поверхности отсеченной горизонтальной плоскости *n-n* части купола

$$F = 2nRh = 27L/?^2(1\text{-}costp).$$

Меридианное усилие определяется по выражению (7.57)

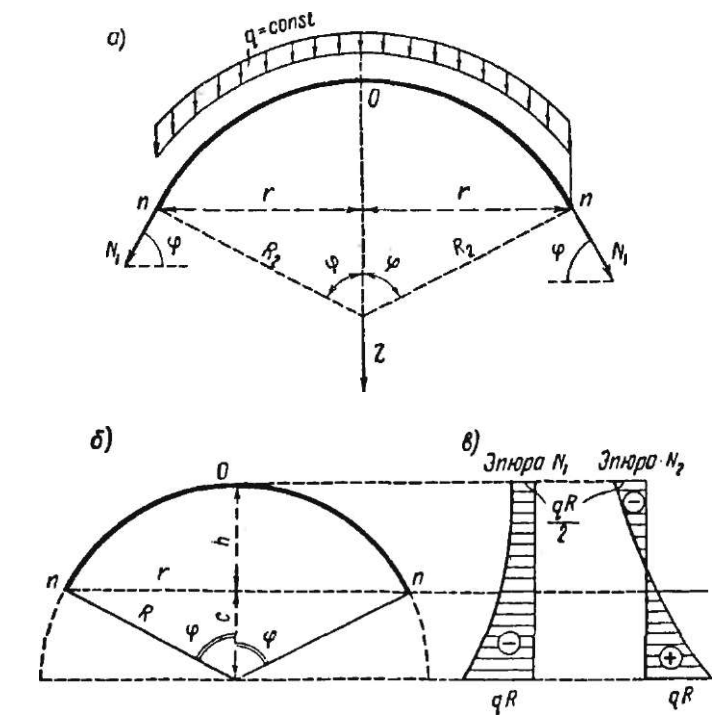


Рис. 7.21

$$\frac{2n/?^2(1-\cos(p)\qquad\qquad {}_qR}{2nr\sin\phi\quad\wedge\quad 1+\cos\phi}$$

Усилия по окружному направлению определяются по формуле (7.58)

$$N_2 = -qF\&\cos\phi\sqrt{\frac{}{1+\cos\phi}}$$

$$aR$$

В вершине купола, где ф = 0 имеем $N\backslash = N_2 = --y-$.

На рис. 7.21, *в* изображены эпюры $N\backslash$ и N_2 по высоте купола.

7.10. Изгиб тонкостенной цилиндрической оболочки при симметричном нагружении

В декартовой системе координат *x, y, z* рассмотрим тонкостенный цилиндр радиуса ***R*** и постоянной толщины ***h*** при действии осесимметричной нагрузки (рис. 7.22). В данном случае очевидно, что деформации и напряжения, возникающие в оболочке, также обладают осевой симметрией.

Обозначим через w радиальное перемещение, а через ф угол наклона касательной к образующей срединной поверхности цилиндра (рис. 7.23).

В данном случае

$$\frac{d\,w}{-} = \Phi. \qquad (7.59)$$

Относительное удлинение $\boldsymbol{E_X}$ отрезка АВ, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности (рис. 7.24), складывается из двух составляющих: из удлинения срединной поверхности e® и удлинения, обусловленного искривлением образующей цилиндра, равному z . Полное удлинение отрезка АВ принимает значение

Удлинение в окружном направлении

Рис. 7.23 Рис. 7.24

Этим удлинениям соответствуют напряжения с* и a_y, величины которых по закону Гука определяются по формулам:

$$- \mathbf{A} \; ^{\wedge} + ц е,); \qquad C ^{\wedge} - ^{\wedge} ^{\wedge} + Ц \; E \; *) . \qquad (7.62)$$

С учетом (7.59) — (7.61) последние формулы преобразуются к виду:

$$^{\circ}x=- \frac{\overline{E}}{1-Ц^2V} \; \frac{dtp}{\sim dx} \qquad (7.63)$$

$$E \; (\quad o \quad w \quad ^{\wedge}чЛ$$

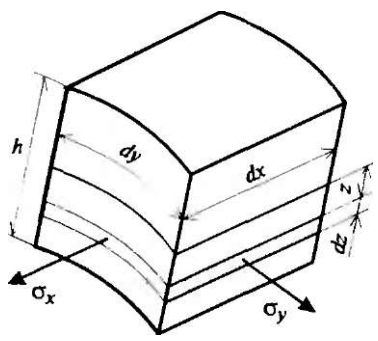


Рис. 7.25

В меридиональных и поперечных сечениях цилиндра возникают моменты, поперечные и продольные силы. Значения моментов и нормальных усилий являются результатом действия c_x и Су. Для этого рассмотрим малый элемент, выделенный из состава цилиндрической оболочки с размерами И, ***dx, dy*** (рис. 7.25). Нормальные силы на площадках ***h dy*** и ***h dx,*** отнесенные к единице дуги сечения, определяются:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \qquad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz. \tag{7.64}$$

Величины моментов в тех же сечениях вычисляются:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \qquad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz. \tag{7.65}$$

С учетом (7.59) и (7.63), выражения продольных сил и моментов, в зависимости от перемещения w, принимают вид:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y\right) \tag{7.66}$$

$$M_x = D\left(-\frac{d^2 w}{dx^2}\right), \qquad M_y = D\left(-\frac{d^2 w}{dx^2}\right) \tag{7.67}$$

где Л — цилиндрическая жесткость оболочки, определяемая по формуле:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

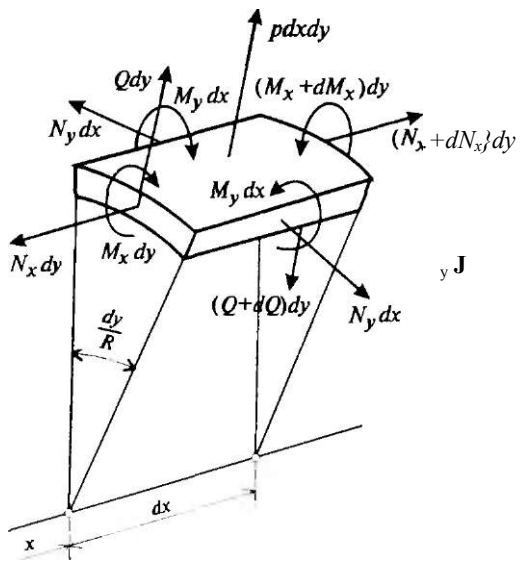


Рис. 7.26

Далее обратимся к уравнениям равновесия, снова рассматривая элемент цилиндрической оболочки с размерами ***h, dx, dy, и к*** его граням приложим равнодействующие силы и моменты, которые равны величинам N_x, N_y, M_x, Му, умноженные соответственно на ***dx*** и ***dy*** (рис. 7.26). Кроме указанных силовых факторов учитываем поперечную силу ***Qdy*** и внешние силы, обусловленные давлением

Здесь необходимо учесть, что при переходе от грани малого элемента с координатой Jt к грани с координатой $x + dx$. усилия получают соответствующие приращения. В осевых сечениях по свойствам симметрии конструкции и внешних нагрузок внутренние силовые факторы остаются одинаковыми. Проектируя силы на ось цилиндра, получим

$$Xx = 0; \; -> \; dN_x = 0; \; -> \; N_x = \text{const}.$$

Это значит, что осевая сила N_x определяется из граничных условий нагружения цилиндра на торцах и она всегда определяется самостоятельно. Поэтому в дальнейшем будем считать эти условия заданными, а силу N_x — известной.

Проектируя все внешние и внутренние силы на радиальном направлении, получим второе уравнение равновесия:

$$-N_{,} \quad dx\hat{}--dQdy+ \quad Pdxdy \quad = \quad 0,$$

откуда

Третье уравнение равновесия получаем, приравнивая нулю сумму моментов всех усилий относительно оси *y,* касательной к дуге нормального сечения:

$$Qdydx \quad = \quad dM_x dy,$$

или

$$\ddot{Q} = \frac{dM_v}{dx} \bullet \qquad (7.69)$$

Вследствие осевой симметрии, остальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

Для дальнейшего преобразования полученных выражений, из 7.66 исключаем $\mathbf{E}\hat{}$, а из (7.68) и (7.69) — поперечную силу Q. Вследствие чего, получим

$$\begin{aligned} {}^{N}y &= -j-^{w} \frac{Eh}{} + \quad \text{»}\overset{N}{x}> \\ & \\ & \frac{d^2 M_x}{dx^2} \quad \frac{}{R'} \end{aligned} \qquad (7.70)$$

и, исключая из этих уравнений N_y, будем иметь

$$\frac{d^1 M_x}{dx^2} = P \quad R \quad Ц\,AT \quad R \quad x \qquad (7.71)$$

С учетом первого выражения (7.67), исключая изгибающий момент из (7.71), получим уравнение относительно одной искомой величины — перемещения w:

$$d^4 w \bullet + 4^4 \kappa\ w = \frac{P}{D} - DR \text{ дг} \qquad (7.72)$$

где $4\kappa^1 = \frac{12(1 - P^2)}{r\,4^2}$ '

Из этого следует, что уравнение (7.72), к которому сводится решение поставленной задачи, структурно совпадает с уравнением (3.4), которое было получено при рассмотрении изгиба балки на упругом основании.

Родственность этих задач неоспорима, так как цилиндрическую оболочку можно рассматривать как совокупность изгибающих полосок, связанных между собой упругими связями. При симметричном нагружении все полоски изгибаются одинаково, и радиальная сила N_y в каждом сечении, как и для балки на упругом основании, прямо пропорциональна местному прогибу w.

Для расчета прочности цилиндрической оболочки наибольшие напряжения определяются выражениями (7.63) при $z =$

$$1 - Ц' \quad E_0 + p \quad W \quad h \quad d^2 w \quad R) \quad 2dx^2$$

$$O_y = \frac{E}{1 - V} \quad ЦE_0 + \quad h \quad d^2 w \quad 2dx^2$$

С помощью (7.66), (7.67) последнее выражение преобразуется в виде

$$N_v \quad 6M_V \quad h \quad y- \quad h \quad - \quad h^2 \qquad (7.73)$$

Таким образом, через перемещения w вьфажаются все внутренние усилия и напряжения.

Для определения w рассмотрим решение уравнения (7.72), записывая его в виде

$$w = e^{\wedge}(q \sin Aæ + c_2 \cos kx) + \quad \sin kx + c_4 \cos kx) + w^*, \quad (7.74)$$

где и>* — частное решение, которое определяется в зависимости от заданного закона изменения внешней нагрузки Дх) вдоль образующей.

Произвольные постоянные с, (/= 1, 2, 3, 4) определяются из концевых условий закрепления цилиндра.

7.11. Расчет длинной цилиндрической трубы при действии внутреннего давления (задача № 22)

Для цилиндрической трубы (рис. 7.27) большой длины */ > 10-М,* имеющей на концах жесткие фланцы, при действии внутреннего давления *р,* требуется:

1. Определить эпюры изгибающих моментов и прогибов w в окрестности фланцев.
2. Определить максимальные напряжения в окрестности фланцев.

Решение

1. Определить эпюры изгибающих моментов и прогибов w в окрестности фланцев

В данном случае справедливо предположить, что осевая сила N_x равна нулю.

Так как давление р постоянно по оси х, то частное решение уравнения (7.72) принимает вид:

$$w \quad \frac{P}{4\,k^*D}\,\bullet$$

Подставляя выражение w* в (7.74), получим

$$w = e'^{\wedge}qsinfce + c_2coskx) + e^{**}(c_3sinkx + c_4cosfct) + \frac{\wedge \text{я р}}{}\,'$$

При достаточно большом расстоянии от фланца $x > 5\,Jkh$ перемещение w должно стремиться к постоянной величине. Этому условию противоречит наличие слагаемого $\sin kx + c_4 \cos fcx)$, которое неограниченно возрастает с ростом х Поэтому для устранения данного противоречия справедливо полагать, что $c_3 = c_4 = 0$. С учетом данного обстоятельства получим

$$w = e^{-to:}(c,sinfcc + c_2cosAx) + \frac{\wedge}{4k^*D}. \quad (7.75)$$

max

Рис. 7.27 Рис. 7.28

Для определения q и Cj, учитывая, что в начале системы координат при jc = 0, в месте сопряжения цилиндра с жестким фланцем должно выполняться условие

$$w = 0; \quad \frac{}{ax} = 0 . \tag{7.76}$$

Подставляя решение (7.75) в граничные условия (7.76) получим

$$C_{\bullet} = Cm = \frac{P}{Ak^2D}$$

С учетом последнего выражения, решение (7.75) принимает вид:

$$w = \bullet pR^1 \text{ -11 - e } ^{\text{кх}} (\sin \text{кх} + \cos \quad .$$

При достаточно больших x > *sjkh* выражение преобразуется и приобретает вид

$$^{w=\pounds}\pounds r\text{-}Eh \tag{7.77}$$

Подставляя (7.77) в (7.67), получим выражение для определения изгибающего момента M_x в следующем виде

$$M_* = \frac{\text{pM}}{2\ V3(1 - //^2)} \text{ т } e^{\text{кх}} (\cos \text{кх} - \sin \text{кх}). \tag{7.78}$$

Эпюра M_x и график изменения w(Jt) изображены на рис. 7.28. Наибольшее значение изгибающий **момент имеет в** заделке, значение которого определяется из (7.78), полагая что JC = 0:

$$\partial^{\wedge}\text{ш}ax = \frac{pRh}{2^{\wedge}/3(1 - (j.^2)}$$

2. *Определить максимальные напряжения в окрестности фланцев*

Поскольку $N_x = 0$, формула, по определению меридионального напряжения c_x из (7.73), принимает вид

$$a_X - {}_h 2 \cdot$$

Следовательно, максимальное напряжение вычисляется по формуле

$$\max _ \text{д.} \wedge X _ PR \quad 3 \quad _ pR$$
$$'ж \quad \text{г} \quad \wedge \quad ; \quad — \quad \text{т} -$$

т.е. изгибающие напряжения в меридиональном направлении оказываются в 1.82 раза больше расчетного напряжения по безмоментной теории, что подтверждает факт о неприменимости безмоментной теории в случаях, когда оболочка имеет краевой эффект.

7.12. Расчет вертикально стоящего открытого цилиндрического бака, заполненного доверху жидкостью (задача № 23)

Пусть открытый цилиндрический бак заделан нижней частью в жесткое основание и заполнен доверху жидкостью (рис. 7.29), тогда при следующих исходных данных: R = 1.0 м — радиус срединной поверхности цилиндра; И = 5-10 ^{3} м — толщина стенки цилиндра; Н = 5 м — высота стенки бака; Е—Ъ10^8 кН/м^2 — модуль упругости материала конструкции; ц = 0.3 — коэффициент Пуассона материала; у = 10 кН/м^3 — удельный вес жидкости, требуется:

1. Определить функции внутренних силовых факторов.
2. Построить эпюры M_x и N_y.
3. Определить эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений в опасных точках опасного сечения.

Решение

1. Определить функции внутренних силовых факторов

Если координату х отсчитывать от днища цилиндра, то давление от жидкости, заполняющей цилиндр, на стенки конструкции принимает значение

$$P \sim У (Н - х).$$

Очевидно, что при этом продольные силы по оси ***x,*** т.е. $N_x = 0$. Согласно (7.16), выражение перемещения w записывается в виде:

$$w = e^{-kx}(c_1 \sin \kappa x + c_2 \cos \kappa x) + e^{\kappa z} \sin \kappa x + c_4 \cos \kappa x) + \frac{}{4\kappa D} \quad (7.79)$$

Произвольные постоянные c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) определяются из граничных условий:

при $x = 0$, $w = -j - = 0$; при $x = H$, $M_x = 0 = 0$.

Согласно выражениям (7.67) и (7.69), граничные условия при $x = H$ преобразуются в виде $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d^3w}{dx^3} = 0$.

Подставляя решение (7.79) в граничные условия задачи, получим четыре уравнения для определения произвольных постоянных c_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$c_2 + c_4 = -\frac{УК}{4\kappa D}.$$

$$C1-C2+C3+C4 = -\frac{}{A\kappa D}$$

$$-c_1 e^{-\kappa H} \cos \kappa H + c_2 e^{-\kappa H} \sin \kappa H + c_3 e^{\kappa H} \cos \kappa H - c_4 e^{\kappa H} \sin \kappa H = 0;$$

$$c_x e^{-\kappa H} (\cos \kappa H + \sin \kappa H) + c_2 e^{-\kappa H} (\cos \kappa H - \sin \kappa H) +$$

$$+c_3 e^{\kappa H} (\cos \kappa H - \sin \kappa H) - c_4 e^{\kappa H} (\cos \kappa H + \sin \kappa H) = 0. \quad (7.80)$$

Рассчитывая величину κH, определим

$$k H = H \frac{p j L}{l R И} = 5 \frac{M i m}{\backslash 1 \cdot 5 \cdot 10} = 9 l.$$

Следовательно, величина $e^{-\kappa H} = e^{-91}$ ничтожна мала по сравнению с $e^{\kappa H} = e^{Ql}$, поэтому, пренебрегая членами системы уравнений (7.80), содержащих множитель $e^{-\kappa H}$ и после некоторых преобразований, решение системы уравнений (7.80) для данного случая можно представить

$$^{1} \quad 4k^{A}D\hat{}k \quad J' \quad ^{1} \quad 4k^{A}D \quad J \quad 4$$

Подставляя выражение постоянных C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в выражение (7.79), откуда определим:

4 k^4D — - H I sin kx - H cos kx + ***H-x)***

$\frac{dw}{dx} = \frac{y}{4k^*D} e^{-kx}$ [(2&# -1) sin fcc + cos

$$M_x = -\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y}{2k^2}\right) e^{-kx}\ \boldsymbol{H}\cos \boldsymbol{kx} + 1 - \boldsymbol{H}\ \mathrm{I}\cos \boldsymbol{kx} \qquad (7.81)$$

$$\boldsymbol{Q} = \hat{} = \frac{d^3}{dx^3}\left(\boldsymbol{-l\frac{}{}\frac{e^{kx}}{4\Pi^2}}\right) \mathrm{f}\ \underset{1}{\mathrm{s}}\mathrm{infcc} + (1 - \boldsymbol{2kH)}\cos \boldsymbol{kx}\ \underset{J}{}1;$$

M_y =\l$M_x$\ $N_y = \frac{Eh}{}w.$

2. Построить эпюры M_x и N_y

Для определения мест расположения опасных сечений необходимо по (7.81) построить эпюры усилия N_y и изгибающего момента. Из построенных эпюр, изображенных на рис. 7.30, видно, что изгибающий момент имеет наибольшее значение в заделке и стремительно уменьшается по мере удаления от днища цилиндра.

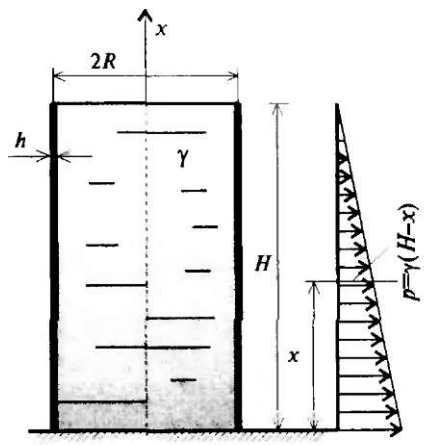


Рис. 7.29

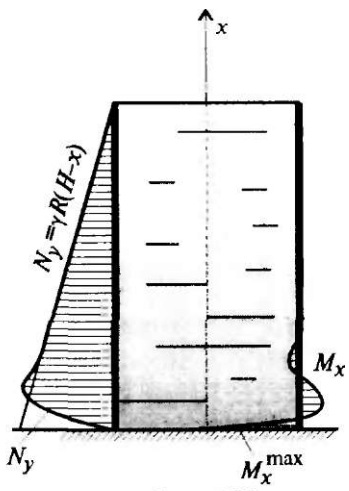


Рис. 7.30

Значение растягивающей силы N_y в заделке равно нулю. По мере удаления от днища бака функция, определяющая величину силы N_y, сначала быстро возрастает, а затем убывает, асимптотически стремясь к уравнению прямой линии. Уравнение этой прямой легко

определить из выражений (7.81), относящихся w и N_y, предполагая в них $\epsilon^{**} \to 0$:

Следовательно, наиболее опасными точками цилиндра являются точки, расположенные у внутренней и внешней поверхности цилиндра, непосредственно вблизи заделки.

3. Определить эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений в опасных точках опасного сечения

С учетом (7.73), главные напряжения у внутренней поверхности принимают значения

$$a_1 = a_{\theta} = \frac{0}{5 \cdot 10} + \frac{6 \cdot 746}{25 \cdot Ю^{-6}} = 17900 \text{ кН/м}2;$$

$$a_{2_2} = a_{\theta} = \frac{}{0.5} + 0.3 \cdot \frac{6 \cdot 746}{25 \cdot 10}, = 5400 \text{кН/м}^2;$$

$$a_3 = 0.$$

Эквивалентное напряжение по теории наибольших касательных напряжений принимает значение

$$\text{Оэкв.} = \text{Omax} - \text{«^min} = \quad - \text{О}_3 = 17900 \text{ кН/м}^2.$$

На внешней поверхности цилиндра в опасном сечении имеем a] = -17900 кН/м^2; a_2 = -5400 кН/м^2; 03 = 0, следовательно $c_{экв}$ = = аз - Oi = 17900 кН/м^2, т.е. эквивалентное напряжение в опасных точках внешней поверхности принимает то же значение, что и в опасных точках внутренней поверхности.

7.13. Расчет цилиндрической трубы при воздействии температуры

Предположим, что однородный длинный цилиндр находится под действием температуры t, распределенной по закону параболы по толщине стенки

$$t = t_0 \quad 1 - \qquad (7.81)$$

где <o — разность температур между наружной и внутренней поверхностью цилиндра. При нагреве цилиндра на температуру to матери-

ал конструкции получает относительное удлинение в трех направлениях, равное

$$\varepsilon = at,$$

где а — *коэффициент температурного расширения материала*, принимаемый равным для всех направлений для данного материала.

Закон Гука в данном случае записывается в виде

$$dp \sim E \qquad 1 - RI)$$

$$E\text{<}P \;\; "\; u \;\; "\; o \;\; "\; J \;\; "\; E \qquad R_{HJ} \qquad (7.82)$$

$$E\,Z = \frac{1}{I} \qquad v$$

Так как принадлежащие цилиндру, равноудаленные от его оси ***z,*** точки будут иметь одинаковую температуру, то в указанных точках выполняются

$$t = \text{const}, \quad dt = 0, \quad \boldsymbol{E_Z = C,} \qquad (7.83)$$

где C — произвольная постоянная.

Условие равновесия выделенного элемента с размерами *dp, dz,* dy в радиальном направлении записывается в виде

$$\frac{d(pa_p)}{p\,dp} \qquad o \;\; o_{\phi|</T\phi p=o^{\wedge}} \qquad (7.84)$$

где тдр — напряжение сдвига. С учетом соотношений (7.83) можно предположить, что в данном случае $\frac{dx_{,,\Phi P}}{dz} = 0$. Тогда уравнение равновесия (7.84) принимает вид

$$^{C}\text{<}P = pdp \qquad (7.85)$$

Из (7.82), выражая напряжение через перемещение, получим

$$a_{\text{Р}} = \frac{\text{£ p}}{(1+\text{p})(1-2\text{p})} \quad \text{1 - ц} \quad \text{ы} \quad \text{1+LL} \quad \text{-O. to} \quad 1 - \boldsymbol{R}$$

$$\frac{du}{\text{ap}} + \frac{1-\text{й}}{\text{Р}}\text{£}\,\frac{u}{\text{p}} + \frac{1+\text{и}}{\text{Р}} - \text{a}\,\Gamma_0 \quad \text{н/} \quad - \text{C} \qquad (7.86)$$

$$\frac{E\ \text{p}}{(1+\text{p})(1-2\text{p})} \quad \frac{}{\text{«Р}} + \frac{\text{Ы}}{\text{p}} + \frac{1+\text{и}}{\text{Р}}\text{a/o} \quad \text{Ля/} \quad 1\text{"И.}$$

Принимая во внимание (7.86) из (7.85), получим

$$\text{rfp}^2 + \frac{d(u/p)}{1-\text{p}} = 0. \qquad (7.87)$$

После двойного интегрирования (7.87), определяется

$$u = a\,t\,0^4 - \text{ту-}\frac{\text{P}^3}{\text{Ля}^4}\left(1 - \frac{1+\text{p}}{2}\right) + \frac{\boldsymbol{B}}{\text{Р}} \qquad (7.88)$$

где ***A*** и ***B*** — произвольные постоянные, которые вычисляются из граничных условий задачи.

Для определения трех произвольных постоянных ***A, B, C,*** входящих в выражения напряжений и перемещений (7.86) и (7.88), можно сформулировать следующие три необходимых граничных условия.

Два граничных условия вытекают из условия равенства нулю радиальных напряжений на наружной и внутренней поверхности цилиндра, т.е.

$$\text{dp} = 0 \text{ при } \text{p} = \boldsymbol{R_B} \text{ и при } \text{p} = \boldsymbol{R_H}. \qquad (7.89)$$

Необходимое третье условие определяется из следующих соображений. Из условия соблюдения равновесия цилиндра по осевому направлению и, следовательно, сумма всех нормальных напряжений на площади поперечного сечения должна быть равна нулю, т.е.

$$\int_{\boldsymbol{RB}}^{\boldsymbol{RH}} a_z\,\text{npdp} = 0. \qquad (7.90)$$

Подставляя выражение c_p из (7.86) в (7.89), а выражение о? из (7.86) в (7.90), и после ряда несложных преобразований, получим:

, ^ 1 - 3 ц Л? , 3 - ц

$$B = at. \frac{1+Ц}{4(1-p)} \cdot p2_{в>} \qquad (7.91)$$

$$C = -a \frac{a/_0}{2Л2\sim^{+}2}$$

Из (7.86), с учетом (7.91), окончательные выражения напряжений можно записать следующим образом:

$$= E\,atn \frac{1}{4(1-ц)} \mathbf{i - 4 + 4} \quad Л$$

$$\circ<p = {}^{E}a\,'o \frac{1}{4(1-и)} 1-3-\frac{}{Rl} \qquad (7.92)$$

$$o_z = £a*_0 \frac{1}{2(1-p)} \mathbf{I - {}_2\ 4 + 4}$$

Для сплошного цилиндра, т.е. при $R_B = 0$, выражение (7.92) упрощается и принимает вид

$$\circ^{P} = \frac{Eat\,\$}{4(1-P)} 1-\frac{}{RlJ} \quad \frac{Eato}{1-3-Ej} \frac{2^{\wedge}}{R/jJ}$$

$$\frac{E\,a\,tn}{2(1-p)} {}^{1-2-} \qquad (7.93)$$

Как показывают выражения (7.92) и (7.93), температурные напряжения для данной конструкции не зависят от диаметра цилиндра, а зависят лишь исключительно от разности температур to между наружным и внутренним слоями, следовательно, *в тождественных* формах, имеющих одинаковую разность температур, равную to , и одинаковый закон распределения, внутренние температурные напряжения будут равны.

7.14. Пример расчета трубы при действии температуры (задача № 24)

Пусть задано цилиндрическое тело с наружным радиусом R_H = 1 м, коэффициентом температурного расширения а = $10^{"5}$, модулем деформации Е= 2-$Ю^8$ кН/$м^2$, коэффициентом Пуассона

ц = 0.3; при разности температур между наружными и внутренними слоями t_0 = 100°, требуется:

1. Определить характер распределения температурных напряжений в сплошном {R_B = 0) и в полом цилиндре *с* R_h= 0.15 м.

2. По *теории прочности Губера-Мизеса* определить характер распределения интенсивности напряжений в поперечных сечениях сплошного и полого цилиндра

Решение

1. Определить характер распределения температурных напряжений в сплошном и в полом цилиндре

Напряженное состояние полого цилиндра определяется соотношением (7.92), *а* для сплошного цилиндра выражением (7.93). Результаты расчетов обобщены в табл. 7.1, где значения напряжений указаны в кН/м^2. Эпюры напряжений a_p, a_ϕ, a_z для сплошного и полого цилиндров показаны на рис. 7.31.

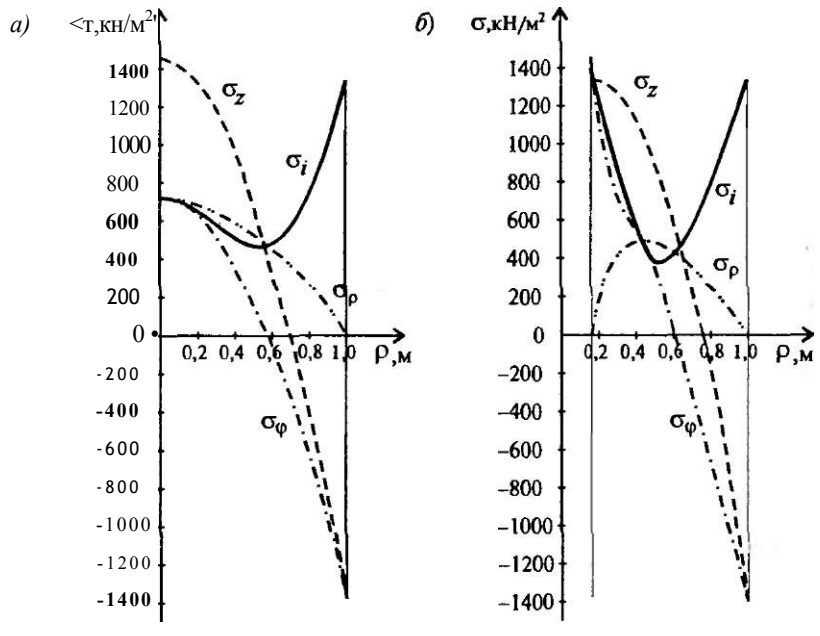


Рис. 7.31

Для сплошного цилиндра полученные результаты, приведенные в табл. 7.1. и на рис. 7.31, *а,* показывают, что радиальные напряжения $0 < o_p < 720$ кН/м^2 являются только растягивающими. Максималь-

ное радиальное напряжение возникает при p = 0. Тангенциальные напряжения $o_ф$ = 720 кН/м^2 при p = 0 являются растягивающими, а на наружной поверхности вызывают сжатие $o_ф$ = 1430 кН/м^2 при p = R_H. Наиболее опасными являются осевые напряжения o,. Максимальные растягивающие напряжения o_z = 1430 кН/м^2 возникают при p = 0, и такого же порядка напряжения сжатия на наружной поверхности.

Иначе распределяются напряжения в случае полого цилиндра. Осевые напряжения o_z остаются того же порядка (рис. 7.31, б). Меридиональное напряжение $o_ф$ на внутренней поверхности цилиндра принимает примерно в два раза большее значение, нежели в случае сплошного цилиндра. А на наружной поверхности приобретают такие же значения, что и на внутренней поверхности, только с обратным знаком.

Более благоприятным является характер распределения радиальных напряжений для полого цилиндра. В данном случае он принимает нулевые значения как на наружной, так и на внутренней поверхности.

2. *По теории прочности Губера-Мизеса определить характер распределения интенсивности напряжений в поперечных сечениях сплошного и полого цилиндров*

Для оценки характера распределения интенсивности напряженного состояния, из полученных данных $o_р$, $o_ф$, c_2 (рис. 7.31), и учитывая, что эти напряжения в данном случае являются главными, по *теории прочности Губера-Мизеса* вычисляется интенсивность напряжений o,-:

л/2

Значения o,- для сплошного и для полого цилиндров внесены в табл. 7.1, а эпюры а, пунктирной линией показаны соответственно на рис. 7.31, *а* и рис. 7.31, б.

Принимая, что трубопровод изготовлен из стали с содержанием 0,15% углерода, для которых $o_т$ » Ю^4 кН/м^2, то в данном случае условие прочности трубопровода выполняется с большим запасом, т.к. максимальное значение a,- = 1390 кН/м^2.

Следовательно, условие прочности выполняется o,- < o_x.

Таблица 7.1

р. м	Сплошной цилиндр				Полый цилиндр, R_B = 0.15 м			
	$\sigma_{ст}$		а		$\sigma_р$	$\sigma_ф$		О/
0.00	720	720	1430	720	-	-		-
0.15	-	-	-	-	0.0	1390	1300	1300
0.20	690	630	1310	650	300	1050	1340	1170
0.40	600	370	970	530	520	490	1050	500
0.60	460	-60	400	490	410	0.0	430	430
0.80	260	-660	-400	830	250	-610	-370	770
1.00	0.0	-1430	-1430	1430	0.0	-1390	-1390	1390

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения пластинки и оболочки как геометрической формы.
2. Дайте определения тонкостенных оболочек и пластин.
3. Сформулируйте основные гипотезы, заложенные в основу теории тонких оболочек.
4. Сформулируйте уравнения Софи Жермена.
5. Сформулируйте граничные условия в следующих случаях закрепления контура пластинки: шарнирно опертой; жестко заделанной и свободной.
6. Поясните суть определения «цилиндрический изгиб пластины».
7. Сформулируйте основные положения безмоментной и моментной теории оболочек .
8. Перечислите основные силовые факторы, возникающие в теле круглой пластины при симметричном нагружении.
9. Дайте определение понятия срединной поверхности оболочки.
10. Дайте определение цилиндрической оболочки как геометрической формы.

ГЛАВА 8

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

8.1. Основы деформационной теории пластичности

Для изучения работы конструкций за пределами упругости необходимо предварительно сформулировать критерии перехода от упругого к *упруго-пластическому* состоянию и сформулировать новые физические уравнения взамен закона Гука, который, как известно, справедлив только для описания связи между напряжениями и деформациями только упругой стадии работы конструкции.

Для сложного напряженного состояния имеем линейные соотношения обобщенного закона Гука:

$$z_z = \frac{1}{E}\, a_z - p(a_x - o,)];\ y_{xy} = \qquad l_{yz} = \qquad y_{zx} = i\frac{ZX}{G} \tag{8.1}$$

Условия перехода из упругого состояния в упруго-пластические могут быть определены по формулам одной из *гипотез предельного состояния.*

Для выполнения практических расчетов наибольшее распространение нашла *гипотеза энергии формоизменения,* согласно которой переход из упругого состояния в пластическое происходит, когда *интенсивность напряжений* <т, достигает *предела текучести,* т.е.:

$$o/ = o_{T)} \tag{8.2}$$

где о/ — интенсивность напряжений определяется через компоненты тензора напряжений:

$$o,- = {}^{\wedge}y\text{-}Jfay \sim {}^{\circ}zf + K - {}^{\circ}zf^{+}K \sim \qquad {}^{+6}(^{T}{*}V^{+m}{}_{zx} + \qquad >$$

или через главные напряжения

$$o,- = \qquad 1 - {}^{\circ}2)^2 + ({}^{\circ}1 - {}^{\circ}3)^2 + (o2 - {}^{\circ}3)^2 \bullet$$

Для упругого состояния, как известно, взамен (8.1) справедливо и следующее обобщенное соотношение:

$$o/ = Ezi, \qquad (8.3)$$

где Е — является модулем упругости материалов и определяется из диаграммы о ~ е при одноосных испытаниях материалов (рис. 8.1), как *Е* — tgipo, а E/ — *интенсивность деформаций:*

$$E/ = 20v)J(^{Ex} \sim {}^{e}y)^{2+}(^{ex} \; ''^{Ez})^{2+}(^{e}y \; ''^{Ez})^{2} \; ^{+} \; | \; (^{v2}*y \; ^{+} \; ^{\wedge} \; ^{+} \; \bullet$$

Соотношение (8.3) можно трактовать как одну из форм выражения закона Гука.

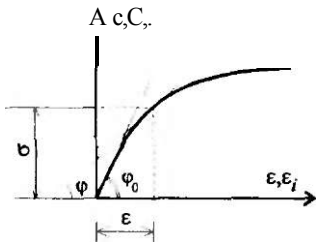


Рис. 8.1

Анализ многочисленных экспериментальных данных показывает, что в упруго-пластическом состоянии связь между интенсивностью напряжений и деформацией можно записать в следующем виде:

$$ст/= £i(e)_{E/}, \qquad (8.4)$$

где ***E\ (E)*** — является переменная величина, и определяется из диаграммы а~s при одноосных испытаниях материалов (рис. 8.1.). При этом £->0, ***E\(0) E.***

Таким образом, соотношение (8.4) устанавливает положение в том, что свойства материала не зависят от вида напряженного состояния. Это положение является исходным в *деформационной теории пластичности.*

Вторым положением, на котором базируется деформационная теория пластичности, является условие, что изменение объема

$$e = E_x + Zy + e_2$$

остается чисто упругим. Это положение также хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Далее учитывая, что е является величиной порядка упругих удлинений, то можно исходить из того, что при пластическом деформировании объем меняется незначительно. Поэтому в пластическом состоянии коэффициент Пуассона допускается принимать равным И = 0.5.

Из выражения (8.4) для модуля деформации можно представить в следующем виде:

$$E(e) = \wedge - . \qquad (8.5)$$

Согласно первому положению деформационной теории пластичности, зависимость между напряжениями и деформациями при одноосном сжатии и растяжении едины для всех видов напряженных состояний. Поэтому, диаграмма между а и £ идентична диаграмме а, и £,. Следовательно, (8.5) можно представить в виде:

Аналог модуля сдвига ***G(E)*** определяется

$$\frac{E(E)}{2(1+ц)} = \frac{E(г)\ cm,-}{3E,-} \qquad (8.6)$$

Физические соотношения между напряжениями и деформациями, аналогично (8.1), для пластичности состояния тела принимают вид:

$$\begin{vmatrix} IL & \frac{1}{2} & Гxy & xy> \\ IL & \frac{1}{2} & 'У* & \frac{3\ E/}{,} \\ & + o. & ,_{ZX} & ZX' \end{vmatrix} \qquad (8.7)$$

Приведенные физические соотношения являются приближенными и считаются справедливыми только для тех видов нагружения, при которых внешние силы в процессе нагружения возрастают прямо пропорционально по времени.

В этом случае главные оси напряженного состояния при изменении внешних сил сохраняют свое направление, т.е. соотношение ((„8.7) справедливо только при простом нагружении.

8.2. Упругопластический расчет стержня при действии продольной силы (задача № 25)

Определить перемещение сечения *A* ступенчатого стержня, изображенного на рис. 8.2, *а* при различных стадиях его деформирования при нагружении его силой Р. Диаграмма деформирования изображена на рис. 8.2, б.

Решение

В данном случае все составляющие тензора напряжений и деформаций, за исключением o_x и e_x, тождественно равны нулю. При этом участок *AC* испытывает растяжение, а участок *AB* — сжатие.

Следует выделить следующие этапы работы конструкций.

На первом этапе участки ***AC*** и ***AB*** деформируются в упругой стадии, т.е.

$$c_x = E\varepsilon_x \text{ при } a_x < \sigma_т \qquad (8.8)$$

а) *б)*

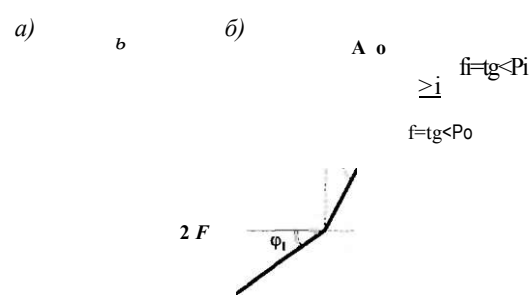


Рис. 8.2

На втором этапе один из участков АВ или ***AC*** переходит в упругопластическую стадию деформирования, и, наконец, когда оба участка ***AB*** и ***AC*** деформируются в упругопластической стадии.

Связь между a_x и ε_x в упругопластической стадии деформирования, согласно диаграмме о~£, записывается в виде:

$$a_x - \sigma_т = E\backslash (e_x - e_т) \text{ при } a_x > \sigma_т. \qquad (8\text{-}9)$$

На первом этапе нагружения, когда в обоих участках материал конструкции деформируется по закону Гука, учитывая, что система один раз статически неопределима, усилия ***N*** обоих участков определяются обычными приемами. Из условий равновесия имеем

$$-N_x + N_2 = P. \qquad (8.10)$$

Учитывая, что стержни верхним и нижним концами жестко закреплены, его абсолютное удлинение должно быть равно нулю, т.е.

$$Д/ = А/] + Д/_2 = 0,$$

откуда

$$2EF = EF \qquad (8.11)$$

В результате совместного рассмотрения (8.10) и (8.11) получим:

(8.12)

Перемещение сечения ***A*** будет следующим

$$А_л = Аi = \frac{Nil}{2EF} \quad \frac{ЪР1}{8EF} \qquad (8.13)$$

В упругой стадии работы конструкции значения напряжения на первом и втором участках соответственно принимают значения:

$$o_X^{(1)} \quad \frac{-N_X}{2F} \qquad 8F \qquad * \qquad F \qquad 4F \tag{8.14}$$

Так как $\left| \quad \right| a_X^{<2>} | I$; то соотношения (8.12-^8.14) будут справедливы до тех пор, пока напряжения на первом участке не достигнут значения $o_т$.

Из выражения (8.14), принимая $-o_т$, определяем величину силы P, при которой нижний участок с номером I переходит в пластичное состояние, а верхний участок с номером II остается упругим:

$$P = {}_{3}Fo_т. \tag{8.15}$$

Для второго этапа нагружения необходимо преобразовать уравнения совместимости:

$$Д/1 = -Д/_2. \tag{8.16}$$

Выражение (8.9) представим в виде

$$\cdot + £_п \tag{8.17}$$

Тогда

$$Л/, = E® / = / \qquad = / \frac{J}{Ex} - \frac{fh}{2F} + E_П \tag{8.18}$$

Подставляя (8.18) в (8.16), получим

$$\frac{1}{Ei} \left(\frac{Ni}{2F} - o_п \right) + En \qquad \frac{N_2}{EF} 1\text{-}5/ \tag{8.19}$$

Совместно решая (8.19) с уравнением равновесия (8.10), получим

$$N, = \frac{3£,}{E + 3E_X} \qquad N_2 = \frac{E}{E + 3E_x} \tag{8.20}$$

Принимая в (8.20) $E = E_x$, можно убедиться, что из (8.20) следуют упругие решения (8.14).

Перемещения сечения A на данном этапе нагружения определяются по формуле

$$\underline{\text{д}} \quad \text{- л} \qquad \frac{^{3}\ \mathbf{I}}{2E_XF\sim\sim 2F(E\ _{+}\ 3E_X)V} \quad {}^{+}\ (\ _{\text{P}}\ \mathbf{I}\ \ 3^{\circ T}\ * \qquad \mathbf{r}\ \frac{\text{E}\ \ \text{E}}{E_x} \tag{8-21}$$

Переходим к решению поставленной задачи на третьем этапе нагружения. Принимая о ® = $o_т$ из второго выражения (8.14), определим значения внешней силы, при которой второй участок переходит в пластическую стадию деформирования:

$$\frac{}{4F} = o_т, \text{ откуда } \boldsymbol{P = 4F}\, o_т . \tag{8.22}$$

На третьем этапе нагружения, т.е. $\boldsymbol{P = 4F}\, o_т$, абсолютное удлинение второго участка определяется:

$$Д_2 = 8\ ^\wedge\ \ 1.5/= 1.5/$$

$$= 1.5/\ \ ^{1}\ \ (\boldsymbol{N}_2 \qquad + \boldsymbol{E_1} \tag{8.23}$$

Подставляя (8.23) и (8.18) в (8.16), получим

$$3N_2 - N_x = \frac{\text{E}\ \ \text{E}\ 1}{E}\ O_т\ F. \tag{8.24}$$

В результате совместного рассмотрения (8.24) и (8.10) определяется:

Принимая $\boldsymbol{E= E_x}$ из (8.25), получим решение задачи в упругой постановке, которая полностью согласуется выражением (8.12). Перемещение сечения $\boldsymbol{A}$ на третьем этапе нагружения определяется по выражению:

$$^{74} \quad * \quad ^{1} \quad 1E_XF \quad 1E_XF\backslash 4 \quad 4\text{-}E \quad {}^{T}J$$

$$\boldsymbol{3} \quad \boldsymbol{Pi} \quad \frac{}{\boldsymbol{E\text{-}E_x}}\ o$$

$$8\ \ E_XF \quad + \quad 8EE_l$$

Если в последнем варианте предположить $E = E\backslash$, то отсюда следует решение в упругой постановке задачи, и полностью совпадающей с решением (8.13).

8.3. Упругопластический изгиб бруса

Рассмотрим упругопластический чистый изгиб бруса. Для простоты предполагается, что поперечное сечение бруса обладает двумя осями симметрии (рис. 8.3, *а)* и что диаграмма деформирования материала при одноосном сжатии и растяжении одинакова *(рис. 8.3, б).* При принятых предположениях следует полагать, что нейтральная линия совпадает с осью симметрии *х* (рис. 8.3, *а)*

Как и при упругом изгибе в данном случае будем исходить, что и при упругопластическом изгибе справедлива *гипотеза плоских сечений,* т.е.

$$e_2 = -\frac{}{\rho}, \qquad (8.26)$$

где $\frac{}{\rho}$ — кривизна нейтральной оси изогнутого бруса, а y — расстояние точек от нейтральной оси.

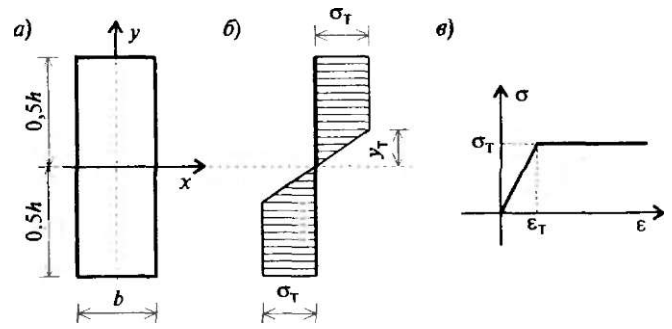


Рис. 8.3

Упругопластическая стадия деформирования поперечного сечения бруса делится на две зоны: упругую и пластическую. Величина , определяющая расстояние границы этих зон от нейтральной линии, определяется по (8.26):

$$ут = 8_т\ р. \qquad (8.27)$$

По мере увеличения изгибающего момента и соответственно кривизны, величина уменьшается за счет сокращения высоты упругой зоны.

Выражение изгибающего момента в данном случае можно преобразовать в следующем виде:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma z y dy = 2b \int_0^{y_m} \sigma_z y dy + 2b a_T \int_{y_T}^{\frac{h}{2}} y dy =$$

$$= 2b \int_0^{y_m} \sigma_z y dy + b a_T \left(\frac{h^2}{4} - y_m^2 \right) \qquad \textbf{(8.28)}$$

Так как из теории изгиба, для упругого участка, выполняется соотношение

Подставляя последнее в (8.28) и после интегрирования получим

$$M_x = \frac{2}{3} b E \rho y_m^3 + b a_T \left(\frac{h^2}{4} - y_m^2 \right)$$

Учитывая, что $\varepsilon_T = \varepsilon_T \rho = \frac{a_T}{E} \rho$, получим:

$$M_x = \frac{bh^2}{4} \left(1 - \frac{\rho^2}{3} \right)$$

откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3 \varepsilon_T}{y_m^2}$$

Из последнего выражения следует, что кривизна бруса с увеличением момента M_x возрастает и обращается в бесконечность, при

$$M_c = \frac{1}{4} bh^2 a \qquad (8.29)$$

В этом случае $\rho = 0$, следовательно, и как это следует из (8.27), $y_m = 0$. Следовательно, все сечение охватывается пластической деформацией. Несущая способность сечения в данном случае исчерпана. Из (8.29) можно определить

$$W_{l} = \frac{M_x}{a_т} = \frac{1}{4} bh^2.$$

Здесь Wj носит название пластического момента сопротивления сечения.

Обобщая выражения (8.29) с известным аналогичным соотношением теории изгиба $a_2 = M_x = W_x a_z = \frac{1}{2} bh\, и_т < M_x < \frac{1}{9} bh\, a_т$ в поперечном сечении балки возникает пластическая деформация, а значение $M_x = \frac{1}{2} bh\, a_т$ следует рассматривать как предельное значение момента, при котором несущая способность конструкций в данном сечении исчерпана.

8.4. Основы теории ползучести

В физических уравнениях теории упругости и теории пластичности введено допущение, что при действии внешних сил тело деформируется мгновенно. Однако в действительности полная деформация любой точки заданного тела при действии внешних сил формируется в течение определенного промежутка времени. Далее известно, что все материалы обладают свойством старения, т.е. физико-механические характеристики во времени меняются, поэтому учет временных процессов, протекающих в элементах конструкций в период действия внешних сил, имеет важное значение в плане совершенствования методов их расчета.

Свойства материалов, связанные с деформацией во времени при действии внешних постоянных нагрузок, называются *ползучестью.*

Явление ползучести в принципе присуще всем материалам. Учет фактора ползучести имеет существенное значение для правильной работы конструкций при действии внешних сил.

Предположим, что в начальный момент времени деформации имеют значения e(0), равные упругой деформации или суммарной упругой и пластической деформации (рис. 8.4).

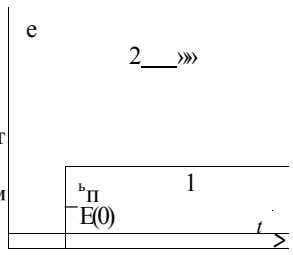


Рис. 8.4

С увеличением времени *t* наблюдается возрастание деформаций. Если про-

цесс сопровождается уменьшением скорости деформирования г и при /->оо, ё->0, то ползучесть называется *установившейся* (1) (рис. 8.4) Если деформация ползучести имеет тенденцию к беспредельному увеличению и в итоге сопровождается разрушением материалов конструкции, то данный вид ползучести называется *неустановившейся* (2) (рис. 8.4).

Полная деформация в произвольный момент времени определяется как сумма начальной деформации e(0) и деформации ползучести $e_п$, т.е.

$$E = e(0) + E_п \qquad (8.29)$$

Заметим, что характер протекания ползучести во времени очень чувствителен в зависимости об интенсивности напряжений и температуры. Увеличение интенсивности напряжений или градиента температуры, как правило, приводит к возрастанию деформаций ползучести.

Если увеличение деформаций ползучести пропорционально увеличению напряжений, то имеем дело с линейной ползучестью, в противном случае — с нелинейной ползучестью.

Если в некоторый момент времени t\ > 0 производить разгрузку, то накопленная деформация ползучести начинает уменьшаться, асимптотически стремясь к некоторому пределу £„, рис. 8.5. Такое явление носит название обратной ползучести. В частном случае, при линейной ползучести деформация е„ при полной разгрузке может стремиться к нулю, т.е. образец во времени полностью восстанавливает свои первоначальные размеры. Это свойство материала называется *последействием.*

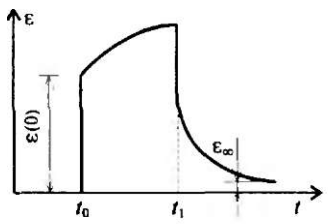


Рис. 8.5

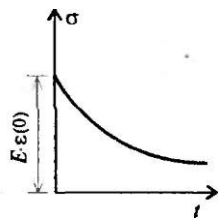


Рис. 8.6

При ползучести предполагается неизменность величин напряжений и рассматриваются изменения деформаций во времени.

Обратимся к другому случаю, характеризующему свойства материалов и тесно связанному с ползучестью. Если имеется образец и обеспечить постоянство деформаций во времени в образце, как показывают эксперименты, то во времени происходит снижение напряжений (рис 8.6). Явления медленного уменьшения напряжений в образце при постоянной деформации называются *релаксацией.*

При линейной ползучести, если материал конструкции не обладает свойством старения, зависимость между напряжениями и деформацией можно представить в следующем виде:

$$e(f,T) = a8(f,T), \tag{8.30}$$

где $5(/,т) = \frac{}{E} + c(t - т)$; $c(t - т)$ — определяет деформацию ползучести при единичном напряжении $a = 1$; $0 < x < f$.

Для функции $c(t - т)$ справедливо равенство $c(0) = 0$.

Теория ползучести, учитывающая предысторию нагружения, называется *наследственной теорией ползучести.*

Связь между напряжением и деформациями по наследственной теории ползучести записывается в виде:

$$= \int_{'o}^{} U(' - *)a(T)A. \tag{8.31}$$

Функция $K(t$-т) может иметь различные представления, в частности:

$$K(t\text{-т}) = y|_e - *('-;), \tag{8.32}$$

где у, $к$ — постоянные коэффициенты, характеризующие свойства материалов.

Если учесть свойства старения материалов, т.е свойства материалов, изменяющиеся во времени, то величина и упругие деформации и деформации ползучести конструкций зависят от возраста материала. В этом случае физические уравнения можно представить в следующем виде:

$$e(Л\,г) = a\,8(t, т); \quad 5(Г, т) = \frac{}{E(т)} + c(t, т), \tag{8.33}$$

где $E(т) = E_0(1 - Pe^{-a т})$; $c(Г, т) = <p(т)\,f(t - т)$; $<p(т) = Л + Д*Г^{л'}$;

$f(t - т) = 1 - «Г^{г('-т)}$.

Здесь а, Р, и, A, B, у — постоянные характеристики материалов конструкций.

В общем случае, когда переменными являются как напряжение так и деформация, соотношения между ними с учетом свойства наследственности и строения в рамках линейной теории записываются в виде:

$$z(t) = {}^{b}\int_{V>}^{} \pounds - + \backslash R(t,T)a(T)dT. \tag{8.34}$$

Здесь вводим обозначения:

(8.35)

∂x

Линейное соотношение между напряжениями и деформациями (8.34) отличается от закона Гука для упругого материала только тем, что вместо величины 1/E здесь имеется интегральный оператор. Отсюда следует следующее простое правило построения решения задачи теории линейной ползучести, которое носит название *принцип Вольтерра.*

Решение задачи по теории линейной ползучести может быть получено из решения аналогичной задачи в упругой постановке, далее следует заменить упругие постоянные интегральные операторы и произвести необходимые операции над ними.

В частности, если в известных упругих решениях предполагать, что они записаны в *изображениях Лапласа,* т.е. заменить упругие постоянные изображениями соответствующих операторов теории ползучести и применить операции переходов от изображений к оригиналам искомых функций, получим решение, соответствующее задаче с учетом ползучести материалов конструкции.

Отметим, что в настоящее время при решении многих инженерных задач как в области механики твердого деформируемого тела, так и других отраслях, широко применяется метод интегрального преобразования Лапласа. Этот метод особенно эффективен при решении линейных дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, а также систем, состоящих из вышеуказанных типов уравнений, суть которого является следующей.

Если имеется некая искомая функция ***y(f)*** от действительной переменной ***t,*** обозначая через образ искомой функции комплексной переменной ***s,*** т.е. изображение заданной функции по Лапласу, тогда формулы по определению оригинала и его изображения имеют следующие представления:

$$= \frac{1}{\hat{} \; c-i\,oo} \int_{c-i\,oo}^{c+i\,oo} e^{st} y(s)ds, \qquad y(s) = \int_{0}^{} e^{-st} y(t)dt,$$

где ***i*** — мнимая единица, а ***c*** - некоторая постоянная, на действительной оси.

vv^wvvsUs/w^vsbvvNl/

Рис. 8.7

В качестве примера реализации изложенного подхода при решении инженерных задач рассмотрим расчет прогиба свободного конца консольной балки (рис. 8.7), в момент времени t= О загруженной равномерно распределенной нагруз-

кой, постоянной во времени. Материал балки характеризуется линейной ползучестью, для которого

$$\varepsilon_0$$

По методу начальных параметров в упругой постановке задачи решение записывается в виде

$$y_{л} \quad 1 \quad M_{u} \frac{x^2}{2!} + Q_{o} \frac{x^3}{3!} \quad Q \frac{x^4}{4!} \quad 1 \quad ql^2 x^2 \quad . x^3 \quad x \quad {}_{x=i} \quad {}_{x=l} \quad /4 \quad /4 \quad g/4 \quad 4 \quad 6 \quad 24 \tag{8.36}$$

Заменим E_0 на $E(s)$ E_o

Тогда выражения перемещения (8.36) в изображениях Лапласа принимают вид

$$№ = - \frac{ч l^4}{8 У_7} \frac{1}{£(s)} \quad \frac{3i1^{/4}}{8/_г} \quad 1 \quad -o \tag{8.37}$$

Здесь $K(s)$ определяется из (8.32)

$$Ш = \frac{У к \quad 1}{E_0 \quad s(s + у)} \tag{8.38}$$

С учетом (8.38), (8.37) принимает вид

$$y(s) = - \frac{ql^{\Lambda}}{8 \quad EJ} \quad 1 + \frac{у к}{s(s + у)}.$$

Выполняя операции обратного преобразования Лапласа, получим

$$y(t) = - \frac{ЯI^4}{8 £_0 Л} \quad 1 + * \tag{8.39}$$

Отсюда следует, что при действии постоянной нагрузки прогиб балки с течением времени возрастает по экспоненциальному закону и при принимает следующее предельное значение:

где y_A — упругое перемещение, т.е. перемещение балки в точке А при / = 0.

8.5. Расчет перемещения балки с учетом ползучести (задача № 26)

Для металлической двухпролетной балки (рис. 8.8, *а),* при следующих исходных данных:

q= 2 кН/м; *P* = 10 кН; *J*= 20 10~4 м4; *EQ* = 2-Ю8 кН/м2; *а* = 3 м; у = 2-Ю"2 1/сут; *к* = 1.3; *K(t* - т) = $=\sum_{CJ} A_e \sim т('-^т)$ требуется определить перемещение за счет изгиба конструкции в сечениях *А* и С, предполагая материал конструкции упругим, далее — линейно-ползучим.

Решение

1. Определить перемещение в точках А и С за счет изгибаемых упругих деформаций конструкции

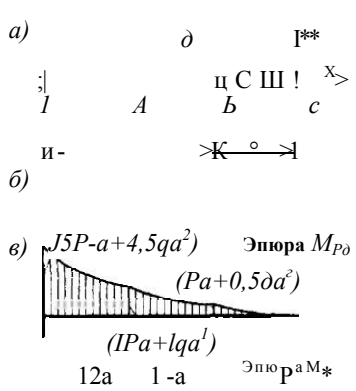


Рис. 8.8

Учитывая, что заданная система один раз статически неопределима, решение задачи рассмотрим по методу сил.

Основная система изображена на рис. 8.8, б. Эпюра моментов в основной системе от заданной системы внешних сил и единичной вертикальной силы X= 1, приложенной в месте и по направлению, отображенной связи показана на рис. 8.8, *в, г.*

Перемножая эпюры моментов, изображенных на рис. 8.8, в, г по формуле Мора, последовательно определим вертикальное перемещение точки *В* от действия силы X = 1 и от действия системы внешних сил:

$$5 \quad \frac{}{EqJ} \cdot \frac{}{6} \cdot 2 \cdot 2o \cdot 2й = \frac{}{3\ V} -$$

$$A_{в} = \frac{1}{Er\backslash J}\left[\frac{2}{3}\text{тм}\ l\ l\ n\ S - 2^{Ш} + aa\ \frac{5}{2}\right]^{a}\ \text{д Ы ъ у}$$

$$+\frac{}{2}aa\ \frac{7}{\sim Pa} + \frac{2}{\wedge a2P} + \frac{Ч\{1ФУ}{2}\ \frac{I\ 33}{E_0J\ \ l\ T^{P}}\ .\ \frac{373}{+\ 1\ 2^{g\ a}}$$

Опорная реакция в точке B принимает значение

$$У_{лв} = -т\frac{Д_{в}}{°_{в}} = \frac{-a^3\ (33_{n}\ .\ 373_{г/j}}{E_0j\{\text{-}6^{P} + l\ 2^{q\ a}} \quad \frac{ЗГЗЗ\ „\ 373\ \wedge}{8о}$$

$$3E_0J$$

$$= 2.0625P + 1.9427*70 = 32.28\ \text{кН}.$$

Далее вычисляются опорные реакции в заделке:

$$£т(0) = 0;\ Л/_0 = 3\ a\ -\ 2\ P\ a\ -\ +\ 32.282a =$$

$$= -90\ -60-81\ +193.68\ =\ 37.32\ \text{кН-м};$$

$$(c) = 0;\ M_Q + R_03a\text{-}2P2a + X_Ba\text{-}q\ \frac{(3a)^2}{} = 0,\ \text{откуда}$$

$$Rq = \sqrt{37.32 + 120 + 81\text{-}96.81} = 15.72\ \text{кН}.$$

Проверяем правильность вычисления величины опорных реакций"

$$\wedge У = По + X_в\text{-}2P\text{-}P\text{-}д3a = 15.72 + 32.28\text{-}\ 20\ \text{-}10\ \text{-}18 = 48\ \text{-}\ 48 = 0.$$

По методу начальных параметров последовательно определим величины упругих перемещений в точках A и С:

$$УA = \frac{1}{E_0J}\left[\frac{Щ\ a}{2!} \quad \frac{Rpg^3}{3!} \quad \frac{да}{4!}\right] \quad \frac{37.32\text{-}9}{2} + \frac{15.72\text{-}81}{6} \quad \frac{2.81}{24}$$

$$\text{"}\ \frac{103.95}{E_0J} = \text{-}0.26 \bullet Ю^{-3}\ \text{м};$$

$$Ус = \frac{1}{E_0J}\left[\frac{M_0(3a)^2}{2!} + \frac{Ro(2a)^2}{3!} \quad \frac{д(3a)^4}{4!} \quad \frac{2P(2a)^3}{3!} + \frac{X_вa^{3/П}}{3!}\right]$$

$$\frac{37.32\text{-}81}{+} \quad \frac{15.72\text{-}36}{} \quad \frac{2\text{-}6561}{24!} \quad \frac{20\text{-}216}{+} \quad 3228 \bullet 27\ j$$

$$\frac{2537.88}{E_0 J} \quad \frac{2537.88}{40\ Ю^4} = -6.34 \bullet 10\sim^3 \text{ м.}$$

2. *Определить перемещение в точках А и С с учетом ползучести материала конструкции*

Запишем выражения упругого перемещения:

$$\boldsymbol{УА} = \frac{103.95}{EqJ} \quad \boldsymbol{Ус} = \frac{2537.88}{EQJ}$$

По аналогу этих формул, запишем выражения перемещений с учетом ползучести материала балки в изображениях Лапласа:

$$103.95 \quad \frac{1}{E(s)} \quad 103.95$$

$$\text{Ус СО} = - \frac{2537.88}{\boldsymbol{E_0 J}} \quad \frac{1}{\boldsymbol{E(S)}} \quad 2537.88 \qquad (8.40)$$

Применяя изображения Лапласа, запишем выражение функции *К(t*-т) в изображениях в виде (8.38).

Подставляя (8.38) в (8.40) получим

$$УАМ = \frac{\boldsymbol{103.95}}{\boldsymbol{E_0 J}} \left(1 + \frac{у\ ^1к}{\boldsymbol{s(s} + у)}\right)^{л}.$$

$$\boldsymbol{E_0 J} \quad ^ \quad \boldsymbol{s\ (s} + у).$$

Переходя к оригиналам окончательно получим

103.95 I

В условиях установившейся ползучести при / -> °о из последних выражений вычисляются результирующие перемещения:

$$\boldsymbol{У_A(*>)} = - - g\ T\ ^ - Il + \boldsymbol{k_1^3} = -0.598 \bullet 10"^3 \text{ м;}$$

$$Jc(«) = - ^ I_{b_0 J} T\ T\ ^ I + k\ = -14.582\text{-}10\text{-}^3 \text{ м.}$$

Как показывают численные расчеты, за счет неограниченной ползучести перемещение заданной системы возросло в 2,3 раза:

$$\frac{y_A(\infty)}{y_B(0)} = 1 + k = 2.3; \quad \frac{\bullet M^{00})}{y_{л}(0)} = 1 + \kappa = 2.3 .$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте гипотезу формоизменения.
2. Перечислите основные положения деформационной теории пластичности.
3. Сформулируйте через интенсивность напряжений и деформаций обобщенные физические гипотезы для упругого и упруго-пластического тела.
4. Сформулируйте понятие пластического момента сопротивления при изгибе балок.
5. Дайте определение о свойстве пластичности материалов.
6. Дайте определение о свойстве материалов, называемого ползучестью.
7. Дайте определение установившейся и неустановившейся ползучести.
8. Поясните, что такое релаксация.
9. Поясните понятие наследственной теории ползучести.
10. Поясните, в чем заключается принцип Вольтера.

ГЛАВА 9

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ ПО МЕТОДУ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

9.1. Основные положения

Расчет конструкций в упругой постановке задачи, как известно, проводится по *методу допускаемых напряжений.* Данный подход при расчете статически определимых и статически неопределимых систем не позволяет найти их истинный запас прочности, так как исчерпание несущей способности конструкции сопровождается появлением в ней пластических деформаций. Для выявления истинного запаса несущей способности конструкции необходимо проводить расчет с учетом упругопластических деформаций. Однако сложность аппарата теории пластичности не позволяет решать широкий круг очень важных инженерных задач. В этом отношении расчет конструкций по *методу предельного равновесия* позволяет дополнить существующий пробел по данному вопросу. Поэтому метод расчета конструкций по предельным состояниям, по сравнению с упругим расчетом, является важным этапом для оценки истинных запасов прочности конструкции. При этом следует отметить, что расчет конструкций по методу предельных состояний является приближенным в том контексте, что, в отличие от упругопластического расчета, не позволяет описать процесс перехода от упругого к предельному состоянию.

Если при проектировании инженерных сооружений необходимо знать процесс формирования напряженно-деформированного состояния вплоть до исчерпания несущей способности конструкций, метод предельного равновесия неприменим. Однако в тех случаях, когда необходимо определить только несущую способность конструкции, этот метод является очень эффективным и имеет важное практическое значение.

При расчете конструкций по допускаемым напряжениям в упругой постановке задачи, как известно, предельной нагрузкой считается та, при которой наибольшее напряжение a_{max}, хотя бы в одной точке опасного сечения достигает величины $a_т$. При этом вводится понятие о допускаемом напряжении, определяемом по формуле $[a] = \frac{}{}$, где п — коэффициент запаса.

При расчете конструкций по методу предельного равновесия предполагается двухстадийный характер деформирования материала: в первой стадии материал подчиняется закону Гука, пока напряжения не достигнут предела текучести, а затем, во второй стадии, предполагая, что в опасных сечениях беспредельно развиваются пластические деформации. Диаграмма зависимости напряжения от деформации для идеально упругопластического материала имеет вид (см. рис. 8.3, ***в).***

Суть метода состоит в том, что конструкция рассматривается в момент, непосредственно предшествующий ее разрушению, когда еще выполняются условия равновесия для внутренних и внешних сил, достигающих предельных значений. Отсюда и произошло название метода предельного равновесия.

Реальные конструкции представляют собой в большинстве случаев многократно статически неопределимые системы, материал которых обладает свойством пластичности. Благодаря этому конструкции обладают дополнительными резервами несущей способности. После того, как в наиболее опасных сечениях напряжения достигают предела текучести, в отличие от статически определимых систем, статически неопределимые системы могут нести дополнительные нагрузки за счет перераспределения внутренних сил.

Для наглядности ниже рассмотрим наиболее представительные примеры расчета конструкций по методу предельного равновесия.

9.2. Определение предельного состояния системы при растяжении-сжатии

Для статически определимой системы, в элементах которой возникают лишь продольные усилия, расчеты на прочность по допускаемым напряжениям и по предельным нагрузкам дают один и тот же результат. Результаты аналогичных расчетов статически неопределимой системы различны.

В качестве примера рассмотрим систему, представляющую собой абсолютно жесткую балку, с одним концом шарнирно опертую и подвешенную на трех одинаковых идеально упругопластических подвесках, длиной /, площадью поперечного сечения ***F,*** модулем упругости материала ***E,*** при заданной схеме нагружения силой Р (рис. 9.1, а). Заданная система дважды статически неопределима.

По мере роста силы Р подвески 1, 2, 3 поэтапно будут переходить в пластическое состояние, причем напряжения в каждой подвеске не могут превышать $a_т$ •

Выделим следующие стадии деформирования заданной системы.

Первая стадия: все подвески работают упруго. Для определения реакций в подвесках составляем уравнения равновесия:

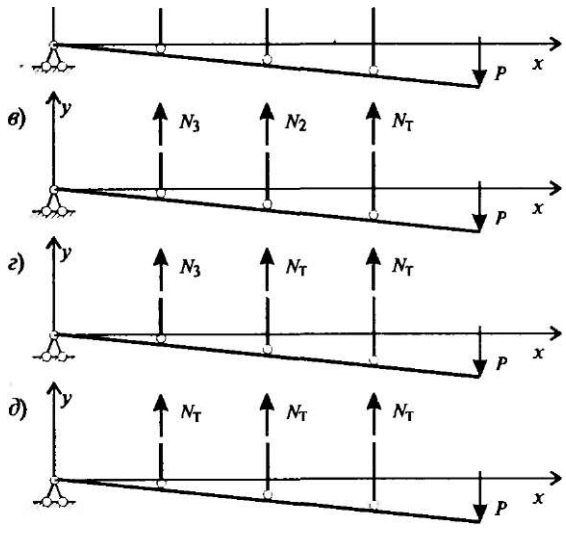
$$Ш_A = PAd\text{-}N_x3d\text{-}N_22d\text{-}N_3d=0. \quad (9.1)$$

Для определения величин усилий в подвесках N_x, Nj и N_3 необходимо составить еще два уравнения совместности. Учитывая, что балка абсолютно жесткая и деформации в подвесках пропорциональны возникающим в них усилиям, то из условия подобия треугольников *ADD', ACC'u ABB'(*рис. 9.1), имеем:

N\ 3d

откуда

: (9.2)



Тогда из (9.1) с учетом (9.2) определяются реакции во всех подвесках:

N_2 =*JP\{9.3)*

$$N_3 = \frac{2}{7}P.$$

Вторая стадия'. при некотором значении Р, как это следует из (9.3), сначала наиболее нагруженная первая подвеска переходит в пластическое состояние, т. е. $N_x = N_T = cm_m F$ (рис. 9.1, *б).* При этом из (9.2) можно установить, что в остальных подвесках усилия будут равны:

$$= \quad N_3 = -jN_T.$$

Подставляя значения усилий в уравнение равновесия (9.1), получим

$$4dP-3dN_T \qquad -2d\hat{}N_T-d\sim N_T \qquad =0,$$

откуда и определим величину внешней силы Р, при которой система переходит во второе состояние:

$$^{p} = 1\,^{N}\,T - \qquad (9\text{-}5)$$

Третья стадия: при дальнейшем росте значения силы *P,* как это следует из (9.3), и вторая подвеска переходит в пластическое состояние, т. е. $N\backslash = Nj = N_T$ (рис. 9.1, *в).* При этом из третьего соотношения (9.3), значение усилия в третьей подвеске будет равно:

$$N_{\ 3} = \pm N_{\ 2} = \pm N_{\ r}\ . \qquad (9.6)$$

Из уравнения равновесия (9.1), с учетом значения усилий в подвесках в третьем состоянии, получим

$$^{P} = J\,^{N}\,J\,\bullet \qquad (9\text{-}7)$$

Четвертая стадия — предельное состояние: в этом состоянии усилия во всех трех подвесках равны своему предельному значению, т.е. N_T (рис. 9.1, *г).* Уравнение равновесия (9.1) при этом принимает вид

$$AdP_m - 3\,dN_T - 2dN_T - dN_T = 0\ , \qquad (9.8)$$

откуда и определяется предельная величина внешней силы

$$P_{\ n\ F} = \hat{}\ N_{\ T} = l\ o_{\ T}\ F\ . \qquad (9.9)$$

Далее определим перемещение fj балки в точке приложения внешней силы Р в различных стадиях работы заданной системы.

При переходе заданной системы от первой стадии деформирования ко второй, имеем:

$$it \qquad д,\ .\qquad f \qquad 4\ N_r l$$

При переходе заданной системы от второй стадии к третьей, имеем

$$_{Nl}=N_2=N_T; \qquad / \ 2 = 2\ \hat{}\ -\ .$$

И наконец, при переходе системы от третьей стадии к предельному состоянию, получим

$$N_1 = N_2 = \quad = N_T; \qquad \beta = 4\frac{N_T l}{EF}$$

Зависимость / от Р показана на рис. 9.2. Она изображается ломаной линией, которая после предельного равновесного состояния становится горизонтальной, т. е. после того, как напряжения достигнут предела текучести во всех трех подвесках. Откуда следует, что при постоянной Р = Риг, перемещение /беспредельно возрастает, т.е. происходит разрушение системы.

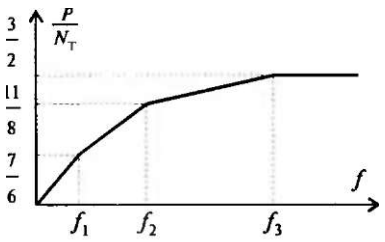


Рис. 9.2

Как видно из приведенного примера, расчет даже для такой простой системы оказывается довольно громоздким, хотя он дает возможность находить не только предельную силу, но и описать поведение конструкции в процессе ее нагружения. На практике при расчете систем с учетом пластических деформаций рассматривают только предельное состояние.

9.3. Предельное состояние статически определимых систем при изгибе

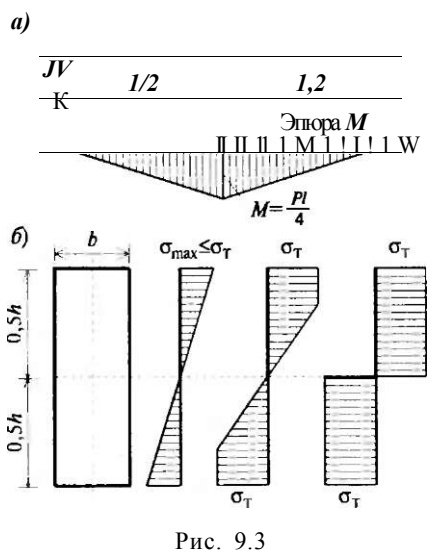


Рис. 9.3

Для систем, работающих преимущественно на изгиб, разрушение сечения определяется в основном величиной изгибающего момента.

Рассмотрим предельное состояние балки с двумя шарнирно опертыми концами, от действия силы Р, приложенной в середине пролета. В статически определимой балке (рис. 9.3), как известно, нормальные напряжения в поперечных сечениях в упругой стадии изменяются по высоте сечения по линейному закону и пропорциональны величине изгибающего мо-

мента. В опасном сечении при достижении напряжений в крайних волокнах величины $а_т$, заканчивается упругий стадия работы и величина изгибающего момента по теории допускаемых напряжений будет определяться следующими известными соотношениями:

$$Л/доп = CJ_T \qquad (9.10)$$

4

откуда допускаемое значение внешней силы вычисляется по:

$$/>_{доп} = ^, \qquad (9\text{-}11)$$

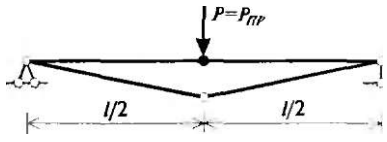
где W— момент сопротивления поперечного сечения балки. Для прямоугольного сечения $W = \frac{bh^2}{6}$, где b, h — размеры поперечного сечения (рис. 9.3, б).

Таким образом, при расчете балки (рис. 9.3, *а)* по теории допускаемых напряжений, допускаемое значение внешней силы определяется по

$$Ъ \quad (9 - 1 2)$$

Однако очевидно, что при $P = P_{доп}$, вычисленной по формуле (9.12), заданная балка далеко не исчерпала свою несущую способность. При увеличении *нагрузки пластические* деформации *проникают* в глубь сечения, вплоть до появления в нем *пластического шарнира,* т.е. состояния сечения, при котором все ее точки перешли в пластическое состояние. В пластическом шарнире момент достигает предельной величины, когда эпюра нормальных напряжений во всех точках в опасном сечении принимает значение $а_Л$ (рис. 9.3, б).

Согласно диаграмме деформирования материала по Прандтлю, продольные волокна балки в этом сечении испытывают беспредельно возрастающие деформации. В этих условиях можно говорить о формировании пластического шарнира в сечении, который превращает данную балку в механизм (рис. 9.4). Это означает, что с возникновением пластического шарнира происходит полное исчерпание несущей способности балки, т.е. заданная система разрушается. Величину



Риг Q 4
ГИ1 -- 7 4

силы, вызывающую образование в балке пластического шарнира, называют *пре дел ьн ой силой* метода предельного состояния.

Значение предельной силы определяется из условия равенства моментов внутренних и внешних сил для опасного срединного сечения балки:

$$Мпр = 2 (а_т ^) А = \quad _{СТт}^{\wedge}{}_{т}; \qquad (9.13)$$

откуда получим

(9-14)

Величина $W_Т = \frac{}{4}$ называется пластическим моментом сопротивления, значение которого в случае прямоугольного сечения было определено в п. 8.3.

Если сравнить величину предельной силы, определенной по методу допускаемых напряжений и по методу предельного равновесия, то получим, что $Р_{пр} = \frac{3}{}Р_{ю п}$.

Из приведенного примера следует, что для расчета изгибаемых элементов по методу предельного состояния, необходимо предварительно определить пластический момент сопротивления в сечениях пластических шарниров.

В таблице 9.1 приведены значения отношения W_T/W для некоторых стандартных форм сечений.

Таблица 9.1

Форма сечения		X	o			•
Wn./W	***1.0***	***1.16***	1.27	***1.50***	1.70	2.00

9.4. Расчет статически неопределимых балок по предельному состоянию. Кинематический и статический способы

При расчете статически определимой балки было установлено, что ее несущая способность будет исчерпана, когда, хотя бы в одном, т.е. в наиболее опасном сечении пластическая область запол-

нит все сечение, т.е. когда в этом сечении образуется пластический шарнир и система становится геометрически изменяемой.

Для статически неопределимых балок образование одного пластического шарнира не приводит к исчерпанию несущей способности, т.к. в этом случае степень кинематической определимости системы снижается на одну единицу. В случае п раз статически неопределимой балки исчерпание несущей способности происходит при формировании Л + 1 пластических шарниров. Однако в ряде случаев часть балки может стать геометрически изменяемой при значительно меньшем числе пластических шарниров.

Например, в статически многократно неопределимой балке с консолью (рис. 9.5), несущая способность заданной системы исчерпается в случае возникновения первого же пластического шарнира над крайней правой опорой.



Для расчета статически неопределимых систем по теории предельного равновесия можно воспользоваться одним из двух способов — *кинематическим* или *статическим.*

При применении кинематического способа, в предельном состоянии составляется уравнение работы всех внешних и внутренних усилий на основе *принципа возможных перемещений.* Этот принцип формулируется так: если система твердых тел находится в равновесии под действием системы сил, то работа, совершаемая этими силами на любом малом возможном перемещении системы, должна быть равна нулю.

При применении *статического способа* при отсутствии упругого расчета, на основе которого предварительно можно определить наиболее вероятную схему разрушения конструкции, задаются различные схемы разрушения предельной стадии работы рассматриваемой системы, и для каждой из них составляются уравнения равновесия и определяются предельные значения внешних сил. Из их числа наименьшая является расчетной величиной предельной силы.

Из числа рассмотренных схем разрушения, на основании которых определяется предельная сила, является наиболее вероятной схемой разрушения конструкции.

Рассмотрим несколько характерных примеров для определения предельной нагрузки для статически неопределимых балок, принимая диаграмму растяжения-сжатия материалов без упрочнения, т.е. диаграмму Прандтля (см. рис. 8.3, *в).*

Пусть трехопорная балка (рис. 9.6, *а)* нагружена силой величиной Р. Эта балка один раз статически неопределимая. На рис. 9.6, б изображена эпюра изгибающих моментов, при упругой стадии деформирования. Для решения этой задачи применим *статический способ.*

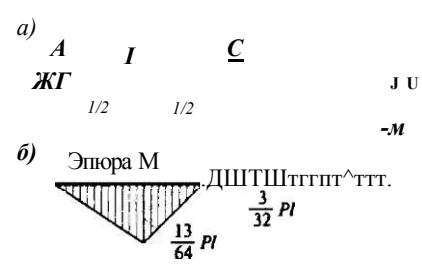


Рис. 9.6

Значение силы $P_{доп}$, при которой в наиболее опасной точке балки напряжение достигает предела текучести и может быть установлено из равенства наибольшего момента, действующего в опасном сечении, допускаемому: $M_{доп} = \frac{I}{64} P_1 = M_{доп}$. Откуда получим

$$P_{доп} = \frac{64}{13} \frac{M_{доп}}{l}$$

Если балка имеет прямоугольное поперечное сечение, то

$$M_{доп} = \sigma_T \frac{bh^2}{6}.$$

и, следовательно,

$$P_{доп} = \frac{32}{39} \frac{\sigma_T b h^2}{l} \qquad (9\text{-}15)$$

Наращивая величину внешней силы $P > P_{доп}$, пластическая область в опасном сечении *В* балки увеличивается. При некотором значении силы в сечении *В* возникает пластический шарнир, тогда величина изгибающего момента в этом сечении становится равной $M_{пр}$. При дальнейшем росте внешней силы Р, момент в сечении *В* остается постоянным и равным $M_{пр}$. Это означает, что трехопорная балка приобретает пластический шарнир в точке В. При этом она нагружена силой Р и двумя моментами $M_{пр}$, приложенных в разных торцах сечения *В* (рис. 9.7, *а).* Следовательно, в данном случае возникновение одного пла-

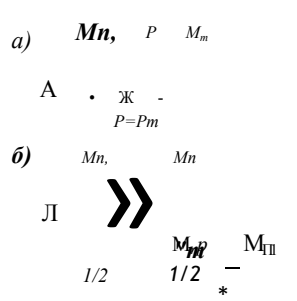


Рис. 9.7

стического шарнира превращает один раз статически неопределимую балку в балку статически определимую.

При дальнейшем росте силы Р изгибающие моменты в сечении ***B*** и на участке ***AB*** не возрастают, а изгибающие моменты на участке ***BCD***, с ростом величины силы ***P,*** растут. При указанных предположениях, наибольшая величина изгибающего момента формируется в сечении С, где он раньше всего и достигает предельной величины $M_{ПР}$.

Когда в сечении ***C*** изгибающий момент достигнет предельной величины $M_{ПР}$, т.е. когда в этом сечении сформируется пластический шарнир, несущая способность балки исчерпается, вследствие чего балка превращается в геометрически изменяемую систему.

Согласно статическому способу, и учитывая, что наиболее вероятная схема разрушения конструкции очевидна и изображена на рис. 9.7, б, величина предельной силы определяется из уравнений равновесия и условий равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту $M_{ПР}$:

$$Y_J M_A = P_{пр} \sim R_c l + R_D 21 = 0\text{-},$$

$$\wedge y = R_A + R_c - R_{пр} - R_D = 0;$$

$$J \wedge M? = R_A \pm - M_{пр} = 0;$$

$$5 >, \; T = R_D l - M_{пр} = 0.$$

Решая совместно последнюю систему уравнений, получим:

$$P_{п}, = (> \wedge, \qquad (9.16)$$

откуда:

$$P_{п}, = \frac{a W}{6} \wedge = \sim \frac{\%(m_m Ь И^2}{1} \cdot \qquad (9.17)$$

При расчете по методу допускаемых напряжений расчетная величина допускаемой силы определяется

$$P \quad » \; {}^{/>_{д}0П} = \frac{32}{39} \frac{d\,j\,b\,h^1}{nl} \qquad (9\text{-}18)$$

где л — коэффициент запаса по несущей способности конструкции.

В случае расчета по методу предельных состояний, величина допускаемой силы принимает значение

$$p_{\text{доп}} = \frac{\boldsymbol{РПР}}{\boldsymbol{n}} = \frac{3\ \text{ст}_т 6/г^2}{л7} \qquad (9.19)$$

Сопоставляя выражения (9.18) и (9.19), получим, что метод расчета по предельному состоянию дает величину допускаемой силы в ^- « 1.83 раза больше, чем метод расчета по допускаемым напряжениям при условии, что коэффициент запаса в обоих методах *принят одинаковым.*

В заключение рассмотрим балку с одним защемленным, а вторым шарнирно опертым концами, нагруженной двумя одинаковыми силами (рис. 9.8, а).

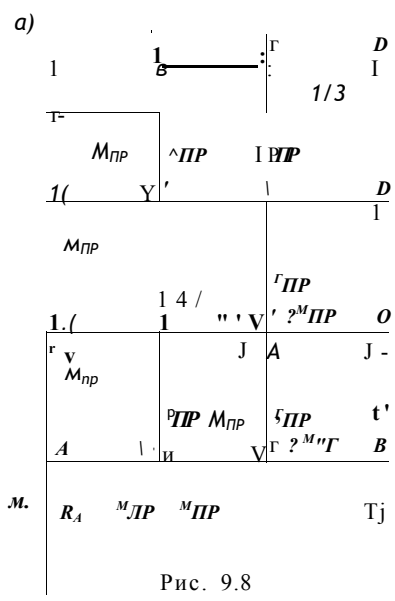


Рис. 9.8

Определим величину предельной силы *кинематическим способом*, предложенным А. А. Гвоздевым.

Рассматриваемая балка, один раз статически неопределима и, следовательно, ее несущая способность исчерпается в случае образования двух пластических шарниров.

Пластические шарниры могут формироваться в сечениях ***A, B*** и ***C.***

Для определения предельной нагрузки по кинематическому способу А. А. Гвоздева необходимо рассмотреть различные сочетания образования пластических шарниров в двух сечениях из трех. Число таких комбинаций равно трем. т.е. числу сочетаний из трех пластических шарниров по два.

Для различных вариантов расположения пластических шарниров составляются уравнения равновесия, при условии равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту $\boldsymbol{M_{ПР}}$. Из полученных уравнений могут быть определены величины предельных нагрузок. Действительной предельной нагрузкой будет наименьшая из вычисленных для различных сочетаний пластических шарниров.

Необходимо заметить, что при составлении уравнений предельного равновесия системы можно использовать из трех уравнений статического равновесия всей системы в целом только два из них. Третье уравнение яптлмятически будет удовлетворяться. Недостаю-

щие уравнения могут быть получены из рассмотрения равновесия отсеченной части системы, предполагая, что рассматриваемое сечение проходит через пластический шарнир.

Рассмотрим различные возможные схемы предельной стадии работы конструкции.

Первая схема, предполагая, что пластические шарниры формируются в сечениях *А* и *В* (рис. 9.8, *б):*

$$Ty = R_A + R_D - 2/^{\wedge} = 0;$$

$$\text{ЪМ}_A = P_{ПР}\ Up_{nP}{}^{\wedge} - R_D l - M_{nP} = 0;$$

$$\text{ТМ"/™} = p_{nP} L - p_D ? L_{+} . M_{nP} = 0,$$

откуда

$$P_{Пр} = 5 \frac{M}{—} \bullet \qquad (9.20)$$

Вторая схема, предполагая, что пластические шарниры формируются в сечениях *А* и *С* (рис. 9.8, *в):*

$$\text{НУ} - R a + R D \sim 2P_{ПР} = 0;$$

$$Y M_A = P_{np}{}^{l} - {}_{+} P_{nP}{}^{\wedge} j - R_D l - M_{nP} = 0;$$

$$ЪМ^{\wedge} = -R_D * {}_{+} M_{nP} = 0,$$

откуда

$$Pnp = * \frac{^{M}Л}{4\ I} \qquad (9\text{-}21)$$

Третья схема, предполагая, что пластические шарниры формируются в сечениях *В к С* (рис. 9.8, *г):*

$$Ty = RA + RD - 2PnP = 0;$$

$$l M_A = p_{np} t {}_{+} p_{np} 2L - R_{l)} i - M_A = o -,$$

$$ЪМ™ = M_A - R_A{}^{l} - M_{nP} = 0;$$

$$ьмр * = M_{BP} - R_D{}^{l} - = o,$$

откуда, решая совместно эту систему уравнений, получим значения изгибающего момента в заделке M_A и значение предельной нагрузки ***РПР'•***

$$Рпр = 9\text{-}\frac{M^{*}_{п}}{I} \qquad \textbf{(9-22)}$$

$$M_A = 6\ M_{ПР} > M_L$$

Так как условие $M_A > M_{ПР}$ не может быть реализовано, то третью схему следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

Сопоставляя предельные значения внешней силы, приведенные в (9.20)—(9.21), определяем, что наименьшая предельная нагрузка имеет место при второй схеме предельного равновесия, т.е. когда пластические шарниры формируются в сечениях ***А и С:***

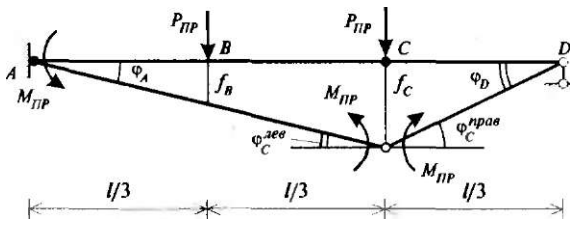


Рис. 9.9

$$РПР = 4\frac{M_{ПР}}{I}$$

Далее рассмотрим применение *кинематического* способа — метода предельных состояний для определения величин продольных сил. Действительная схема разрушения системы показана на рис. 9.9. Составим уравнения работ всех внутренних и внешних усилий на возможных перемещениях:

$$\sim M_{ПР}\ \text{фл} + P_{пр}\ f_B + P_{пр}\ f_c - M_{ПР} \qquad - M_{ПР}\ \text{ф}^{\wedge} = 0\ . \qquad (9.23)$$

Составляя уравнения совместности, получим

$$\begin{aligned} &\Phi/4 - 2\sim j\sim' \qquad \sim 2 \\ &\Phi c \quad -\sim \Phi/4 - 2 \sim f'' Vc \quad - \cdot \cdot \quad -VD\text{-}J\text{-}J\text{--} \end{aligned} \qquad (9.24)$$

Уравнение (9.23), с учетом (9.24), примет вид:

$$-M_{ПР}\ |\&\text{-} + P_{пр}\&\text{-} + P_{„р}\ fc\text{-}M_{пР} \qquad м_{ПР}ъ\&\text{-} = o,$$

откуда

$$РПР = 4\frac{M_{г}}{I} \qquad (9.25)$$

Сопоставляя выражения (9.25) и (9.21), заметим, что кинематический и статический способы дали идентичные результаты по значению предельной силы.

9.5. Пример расчета статически неопределимой балки (задача № 27)

Для статически неопределимой балки (рис. 9.10, *а)* по методу предельного равновесного состояния и по методу допускаемых напряжений определить расчетную величину внешней силы Р и сравнить полученные результаты, предполагая, что балка имеет постоянное поперечное сечение прямоугольной формы с размерами ***b<h.***

Сначала рассмотрим расчет заданной системы по методу допускаемых напряжений.

Заданная система один раз статически неопределима. Для определения положения опасного сечения и величины изгибающего момента в опасном сечении в упругой стадии работы балки применим метод сил.

Основная система представлена на рис. 9.10, 6. На рис. 9.10, *в* и рис. 9.10, *г* в основной системе изображены эпюры моментов от силы X= — 1 и Р. Далее, по формуле Мора вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

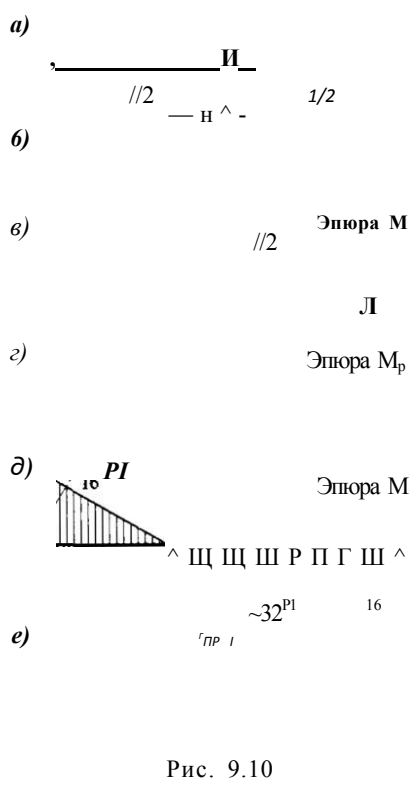


Рис. 9.10

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot l \cdot l \cdot \frac{l}{3} = \frac{l^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{12} \cdot 2 \cdot l \cdot l \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

Из решения канонического уравнения метода сил

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0,$$

получим

$$X = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16} P.$$

После определения величины опорной реакции X. построим окончательную эпюру моментов в заданной системе (рис. 9.10, *д).* Откуда следует, что опасным является сечение 1, где значение момента равно $M_2 = M_{max} = \frac{3}{16}Pl$.

Предполагая, что в опасном сечении в опасной точке напряжение равно $с_т$, по методу допускаемых напряжений определим допускаемую величину внешней силы $P = P_{ДОП}$

3:

$$\frac{Mmax}{w_x} \quad \backslash Ь^{Рдоп\ 1} \quad 9 \quad \frac{P_{доп}l}{bh^2}$$

6

откуда

$$\boldsymbol{Pдоп=} \qquad (9.26)$$

Для расчета заданной системы по методу предельного равновесного состояния, предварительно выразим значения моментов в сечениях 1 и 2 через внешнюю силу Р и реакции X, возникающей в месте шарнирного опирания:

$$M_x = Xl\text{-}P^l\text{--},$$

$$\boldsymbol{m_2\text{-}X.L.}$$

Исключая опорную реакцию X из последних соотношений, получим

$$\boldsymbol{M_X\text{-}2M_2 = -P\sim.} \qquad (9.27)$$

Учитывая, что в предельном состоянии в данном случае имеем $P = P_{ПР}$; M_x — $-M_{ПР}$; $M_2 = M_{ПР}$, уравнение (9.27) преобразуется в виде

$$3\,M_{ПР} = P_{ПР}\text{^},$$

откуда окончательно получим

$$P_{пр} = \frac{Ш_п}{L} = \frac{6}{L} \cdot o_1 W_1 = \frac{6}{L} \cdot c_т \frac{bh^2}{} = 2^3, \frac{bh^2}{} c_т \qquad (9.28)$$

Принимая во внимание результаты расчетов по методу допускаемых напряжений и по методу предельного равновесия, соответственно (9.26) и (9.28) составим отношение:

$$P_{доп} = \frac{8}{9} \frac{bh^2}{I} \sigma_T = \frac{16}{3} \frac{bh^2}{2} \sigma_T = 1.69 \cdot 27 = 169$$

Следовательно,

$$P_{пр} = 1.69 P_{доп} >$$

т.е. несущая способность рассматриваемой системы по результатам расчетов метода предельного равновесия в 1.69 раза больше, нежели по методу допускаемых напряжений.

Вопросы для самопроверки

1. Поясните суть метода допускаемых напряжений.
2. Поясните суть метода предельного равновесного состояния.
3. Поясните суть кинематического метода предельного равновесного состояния.
4. Поясните суть статического метода предельного равновесного состояния.
5. Дайте определение понятия пластического шарнира при изгибе конструкций.

ГЛАВА 10

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА НАДЕЖНОСТЬ

10.1. Общие положения расчета на надежность

В разделе 1 отмечалось, что при выполнении расчетов инженерная конструкция представляется в виде расчетной схемы, которая состоит из условных элементов с определенной прочностью и включает условно представленные нагрузки и воздействия. Такая расчетная схема лишь приближенно отражает фактические свойства реальной конструкции, т.к. предполагает детерминированность (т.е. полную определенность) прочностных свойств материалов, внешних воздействий и геометрических размеров.

Между тем очевидно, что все перечисленные расчетные параметры являются случайными. Так, одинаковые элементы конструкции, испытываемые по строго определенной программе, показывают различную величину прочности. Большую изменчивость (т.е. неопределенность) имеют некоторые внешние воздействия, например снеговая и ветровая нагрузки, которые могут изменяться от нуля до некоторых пределов. Значительно меньшей изменчивостью, вызванной неточностью изготовления и монтажа конструкций, обладают геометрические размеры.

При проектировании инженерных конструкций вероятностный характер расчетных параметров учитывается с помощью соответствующих коэффициентов запаса по нагрузкам, по материалам и т.д., которые не имеют достаточного теоретического и экспериментального обоснования и не учитывают факторы случайной природы в явном виде. Для более объективного отражения поведения конструкций в эксплуатации их расчет должен базироваться на теории надежности, основанной на аппарате теории вероятностей, математической статистики и теории случайных функций. Тогда все прочностные и геометрические характеристики конструкций, а также все воздействия на них представляются в виде случайных величин или случайных процессов, если воздействие зависит от времени. В дальнейшем ограничимся рамками случайных величин.

В теории надежности разработана определенная система понятий и терминов. *Надежностью* называется способность объекта вы-

полнить свои функции в течение установленного срока службы. Реализация состояний объекта, при которых он не может выполнять свои функции, называется *отказом.* За отказ в работе конструкции в зависимости от вида решаемой задачи может быть принято появление краевой текучести, т.е. появление в наиболее опасных точках наиболее опасных сечений пластической деформации; превращение конструкции в механизм; потеря устойчивости; возникновение недопустимых перемещений и т.д. Надежность является качественной характеристикой, которая оценивается количественными показателями. Основным показателем надежности, через который могут быть определены все другие, является вероятность отказа Pj за время эксплуатации. Часто используется величина, называемая вероятностью безотказной работы P_S или надежностью H, которая связана с вероятностью отказа Pj соотношением

$$P_,=H = L-P_F. \qquad (10.1)$$

Общий алгоритм расчета строительных конструкций на надежность следующий.

Все расчетные параметры, обладающие изменчивостью, можно разделить на две основные группы: первая включает характеристики, относящиеся к свойствам самой конструкции; вторая характеризует внешние воздействия. Тогда для любой заданной конструкции и любого вида отказа условие отказа может быть сформулировано в форме предельного неравенства:

$$g = R\text{-}S< 0, \qquad (10.2)$$

где R и S — случайные величины, характеризующие соответственно сопротивление конструкции и нагрузочный эффект, выражены через одинаковые физические величины; g — случайная величина, называемая функцией работоспособности.

Вероятность выполнения условия (10.2) есть вероятность отказа P\.

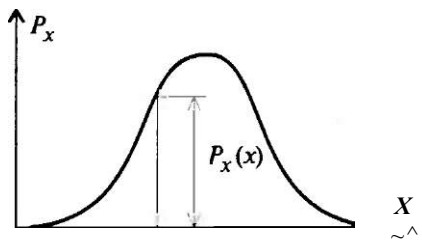
10.2. Основные сведения из теории вероятности и математической статистики

Величина X называется случайной, если в каждом отдельном случае нельзя однозначно точно предсказать ее значение. Случайная величина не может быть определена одним значением. При каждом наблюдении мы получаем одно из ее возможных значений, которое называется реализацией случайной величины и обозначается x.

В качестве примера случайной величины рассмотрим предел прочности материала. Пусть в результате испытаний определенного количества образцов ***N*** получена совокупность значений прочности. Эта совокупность может быть представлена гистограммой. Для этого область изменения случайной величины по оси абсцисс разбивается на равные интервалы, а по оси ординат откладывается отношение количества попаданий в каждый интервал я, к общему числу всех испытаний ***N*** (рис. 10.1).

Рис. 10.1

В пределе при очень большом количестве образцов и малом интервале разбиения получаем непрерывную функцию, которая называется ***функцией плотности распределения*** случайной величины (в данном случае прочности) или просто плотностью распределения $p_x(x)$ (рис. 10.2).



Одно из свойств плотности распределения состоит в том, что площадь под кривой равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)dx = 1. \qquad (10.3)$$

Определим вероятность $P_x(x)$ того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x. Эта вероятность будет равна площади под кривой плотности распределения $p_x(x)$, лежащей левее абсциссы x (рис. 10.2).

Функцию $P_x(x)$ (рис. 10.3) можно получить, интегрируя функцию плотности распределения $p_x(x)$.

$$P_x(x) = \quad (10.4)$$

Из (10.4) следует, что

$$p_x(x) = p;(x).$$

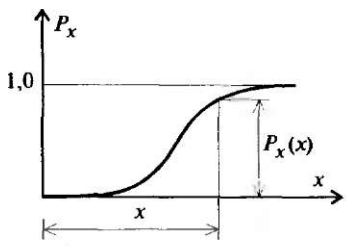


Рис. 10.3

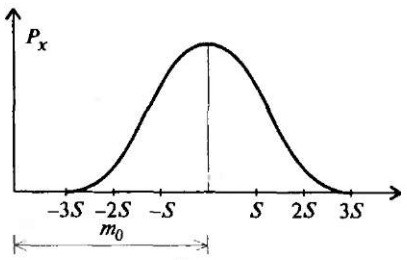


Рис. 10.4

Плотность распределения, так же, как и функция распределения, в полном объеме характеризует случайную величину X, т.е. является одной из форм закона распределения. Основными параметрами характеристики случайной величины являются математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия.

Математическое ожидание представляет собой среднее значение самой случайной величины и определяется как

$$M[X] = m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x)dx. \quad (10.5)$$

Используя геометрические представления, мы можем определить математическое ожидание случайной величины как абсциссу центра тяжести площади под кривой плотности распределения (рис. 10.4).

Обычно кривая плотности распределения имеет колоколообразный вид, и наиболее вероятные значения случайной величины лежат в окрестности математического ожидания. Чем более пологий вид имеет кривая плотности распределения, тем больше рассеяна случайная величина, т.е. имеет большую изменчивость. В качестве меры или характеристики рассеяния относительно математического ожидания п\ принимается величина

$$D[X] = D= \int (x - m_0)^2 p_x(x)dx, \quad (10.6)$$

называемая дисперсией, которая представляет собой момент инерции площади под кривой плотности распределения относительно вертикальной центральной оси, проходящей через математическое ожидание.

Для того чтобы привести характеристику рассеивания к размерности случайной величины, предпочитают рассматривать величину ^[Л^] — неотрицательное значение корня квадратного из величины дисперсии

$$\text{ОД} = \hat{} = \text{л}/1), \tag{10.7}$$

называемую средним квадратическим отклонением или стандартом.

Следует отметить, что существует бесконечное множество законов распределения, но на практике используются лишь некоторые из них. Особое положение занимает нормальный закон распределения (часто называемый законом Гаусса), который характеризуется соответственно плотностью вероятности и функцией распределения:

$$p_x(x) = \frac{1}{\text{л}/2\text{л}X)} e^{\frac{(x-щ?}{}}, \tag{10.8}$$

$$P_x\{x) = \frac{1}{yl2nD} \int_{-oo}^{x} e^{1D} \tag{Ю-9}$$

где m_0 и D — математическое ожидание и дисперсия нормального распределения.

Коэффициент перед экспонентой в (10.8) вводится в соответствии со свойством (10.3) для того, чтобы площадь под кривой плотности распределения была равна единице (рис. 10.2).

Широкое использование нормального закона основано на центральной предельной теореме теории вероятностей. Можно доказать, что сумма достаточно большого числа независимых случайных величин, подчиненных любым законам распределения, приближается к нормальному закону с увеличением количества суммируемых величин.

Если ввести новую переменную $z = (x - m_0)/S$, называемую ***характеристикой безопасности,*** то выражение (10.9) можно привести к удобному для табуляции виду

$$\frac{1}{\text{л}/2\text{л}} \int_{2\text{л}}^{\text{o}} \frac{X}{-oo} \backslash e^{I} d\hat{} +) e^{-51} \tag{10.10}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\text{л}} \int_{\text{o}}^{} + =$$

где £ — независимая переменная, изменяющаяся в пределах

$0 < 4 < г$; $= \frac{1}{\sqrt{2л}} \int_0^{*} e^{-\frac{2}{2}} d*$ — интеграл вероятностей Гаусса или функция Лапласа (табл. 10.1).

Таблица 10.1

г	Ф(г)	*г*	Ф(г)	*г*	Ф(г)
0.00	0.0000	1.15	0.3749	2.35	0.4906
0.01	0.0040	1.20	0.3849	2.40	0.4918
0.05	0.0199	1.25	0.3944	2.45	0.4929
0.10	0.0398	1.30	0.4032	2.50	0.4934
0.15	0.0596	1.35	0.4115	2.55	0.4947
0.20	0.0793	1.40	0.4192	2.60	0.4953
0.25	0.0987	1.45	0.4265	2.65	0.4960
0.30	0.1179	1.50	0.4332	2.70	0.4965
0.35	0.1368	1.55	0.4394	2.75	0.4970
0.40	0.1554	1.60	0.4452	2.80	0.4974
0.45	0.1736	1.65	0.4505	2.85	0.4978
0.50	0.1915	1.70	0.4554	2.90	0.4981
0.55	0.2088	1.75	0.4599	2.95	0.4985
0.60	0.2257	1.80	0.4641	3.00	0.49865
0.65	0.2422	1.85	0.4678	3.05	0.49932
0.70	0.2580	1.90	0.4713	3.10	0.49966
0.75	0.2734	1.95	0.4744	3.20	0.49931
0.80	0.2881	2.00	0.4772	3.40	0.49966
0.85	0.3023	2.05	0.4798	3.60	0.499841
0.90	0.3159	2.10	0.4821	3.80	0.4999968
0.95	0.3285	2.15	0.4842	4.00	0.499968
1.00	0.3413	2.20	0.4861	4.50	0.499997
1.05	0.3531	2.25	0.4878	5.00	0.49999997
1.10	0.3643	2.30	0.4893		

10.3. Функции случайных величин и методы оценки надежности

При оценке надежности (определении вероятности отказа) задача вероятностного расчета сводится к построению функции случайных величин. В общем случае это весьма сложная задача. На этапе проектирования обычно ограничиваются определением только числовых характеристик функций случайных величин, основными из которых являются математическое ожидание и дисперсия

(или стандарт). Для этого используют несколько методов. Рассмотрим некоторые из них.

Метод двух моментов. Этот метод применяется в простейшем случае, когда определяются числовые характеристики линейной функции случайных аргументов, распределенных по нормальному закону.

Рассмотрим статически определимую стальную балку постоянного поперечного сечения, свободно лежащую на двух опорах и нагруженную вертикальной сосредоточенной силой в середине пролета (рис. 10.5).

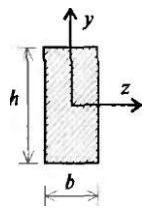


Рис. 10.5

Условие прочности при изгибе имеет вид

$$<7 = \wedge - << T_T, \quad (10.11)$$

Эпюра М - и т где M_x — максимальный изгибающий момент; W_x — момент сопротивления сечения; от — предел текучести стали.

В нашем случае максимальное напряжение возникает в точке приложения силы в середине пролета и равно

$$M_x = y ; \quad (10.12)$$

Момент сопротивления сечения

$$\frac{bh^2}{} \quad (10.13)$$

С учетом (10.12) и (10.13) условие прочности стальной балки будет иметь вид

$$a = \frac{\overline{ЬР1}}{Ш^2} г- < с г_т , \quad (10.14)$$

За отказ в работе конструкции примем появление краевой текучести. С учетом (10.14) функция работоспособности (10.2) примет вид

$$£ = ° Г - Т 7 7 Т - \frac{ЬР1}{2bh} \quad (Ю15)$$

В данном случае сопротивление конструкции R равно

$$R = <7j, \quad (10.16)$$

а нагрузочный эффект S равен:

$$„ \quad \frac{3\,Я}{2\,bh^2} \tag{10.17}$$

Наибольшей изменчивостью, как правило, обладает внешняя нагрузка Р и предел текучести стали ст\ , поэтому примем их случайными. В качестве закона распределения этих величин принимаем нормальный закон с соответствующими параметрами распределения (математическим ожиданием и стандартом): для нагрузки — m_p и S_p; для предела текучести — m_a и S_a. Остальные параметры, а именно геометрические размеры, в выражении (10.15) обладают значительно меньшей изменчивостью по сравнению с Р и $a_т$ и их случайностью можно пренебречь и принять детерминированными.

Итак, имеем функцию работоспособности g, линейно зависящую от случайных величин P и от Величина g также является случайной и в данном случае из курса теории вероятностей следует, что ее распределение подчиняется нормальному закону. Определим математическое ожидание m_g и стандарт S_g случайной *величины* g. Для этого воспользуемся основными свойствами числовых характеристик функций случайных величин, которые приведены в таблице 10.2.

Таблица 10.2

	Свойства математического ожидания	Свойства стандарта
1	***M[C] = C***	5[A-]>0; 5[C] = 0
2	***M[C-X] = C-M[X]***	5[C • X_J = |c| • 5 ^]
3	*M [X ± Y] = M [X] ± M [Y]*	5ТЛГ±П=>***js²[x] + s²[r]***
4	***M[X²]= M²[X]*** *+D[X]*	*d [x ² \ = m\x⁴\~[M²[X]+D[X]\²*
5*	***M\X*** *Y) =* ***M\X*** *M\Y)*	*d [x ± y] = d [x) + d \ y)*
6*	–	*d [x y] = d [x] - d [y] +* ***+ D[X]M*** ²[r]+ Z)[y]M ***²[x]***

Примечание: С— константа; *идя* свойств * — *X, У*— независимые случайные величины.

С учетом приведенных соотношений (табл. 10.2), получим

$$m_{\text{„}} \quad \frac{\text{Ъ}m_{P}l}{\text{ТЫ?}'} \tag{10.18}$$

$$\text{V} \quad \backslash 2bh^{1} \tag{10.19}$$

Зная характеристики распределения случайной величины ***g, c*** помощью таблицы 10.1 можем определить вероятность безотказной работы:

$$H = P_{\text{я}}Л + \Phi' \text{ V} \quad \text{^'gj} \tag{10.20}$$

Соответствующая вероятность отказа

$$P_f = l - P_s = \backslash - 0 \quad \text{v } {}^{s}g \tag{.10.21}$$

Пусть для рассмотренной балки даны следующие исходные данные: длина балки I = 2 м; ширина сечения b = 0.05 м; высота сечения h = 0.1 м.

Внешняя случайная нагрузка P, распределенная по нормальному закону, имеет следующие параметры распределения: математическое ожидание mp= 26 кН; стандарт распределения Sp= 2,6 кН.

Случайный предел текучести $a_т$ имеет параметры: математическое ожидание m_s = 2.4-10^5 кН/м^2; стандарт распределения S_s = =2.4-10^4 кН/м^2.

Тогда

$$m_{\text{8}} = m_{\text{„}} \text{ -• } \frac{3\,m_{P}l}{2\,bh} \quad 2,4 - 10^{5} - \text{^ ^} = 84000\text{кН/м2};$$

$$\text{II} \quad \text{I.}2bh^{2} \quad (2,4 \cdot 10^{4})^{2} + \frac{3 \cdot 2,6 \cdot 2}{2 \cdot 0,05 \cdot 0,1^{2}}$$

$$= 28624,5$$

Вероятность безотказной работы

$$\text{г . - 1} + 9 \quad \text{v } {}^{s}g \; J \quad 1 + \Phi\left(\text{Ш } 1 \right. \quad 2 \quad 4.28624,5 = \text{^} + 0(2,935) = 0,9984;$$

вероятность отказа

$$P_f = 1 - P_s = 1 - 0{,}9984 = 0{,}0016.$$

Метод статистической линеаризации. Этот метод применяется в случае, когда определяются числовые характеристики нелинейной функции случайных аргументов. Наиболее эффективен метод статистической линеаризации при вероятностях отказа $P_j > 0{,}001$. Данный метод основан на разложении функции работоспособности в ряд Тейлора.

Пусть имеется нелинейная функция нескольких переменных непрерывная и дифференцируемая в точке A с координатами

$$g = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{10.22}$$

При разложении данной функции в ряд Тейлора в окрестности точки A получим

$$g = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (x_1 - a_1)\frac{\partial g}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial g}{\partial x_2} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial g}{\partial x_n} + W, \tag{10.23}$$

где $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ — значения частных производных, которые берутся при $x_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; W — нелинейные члены ряда.

Предположим, что функция работоспособности имеет вид (10.23). Разложим ее в окрестности математического ожидания случайных аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т.е. в окрестности точки с координатами $(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n})$ и отбросим нелинейные члены ряда W

$$g = f(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}) + (x_1 - m_{x_1})\frac{\partial g}{\partial x_1} + (x_2 - m_{x_2})\frac{\partial g}{\partial x_2} + \ldots + (x_n - m_{x_n})\frac{\partial g}{\partial x_n}. \tag{10.24}$$

Используя таблицу 10.2, определим математическое ожидание случайной величины g

$$m_g = f(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}) + (m_{x_1} - m_{x_1})\frac{\partial g}{\partial x_1} + \ldots + (m_{x_n} - m_{x_n})\frac{\partial g}{\partial x_n} + \frac{1}{2}K_{x_1 x_1}\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \ldots + K_{x_n x_n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = f(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}), \tag{10.25}$$

стандарт будет равен

Отметим, что случайная величина g в общем случае не будет подчиняться нормальному закону, даже если аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ распределены по нормальному закону. Но при выполнении вероятностных расчетов часто делается допущение о подчинении функции g нормальному закону. Тогда вероятность безотказной работы определится по формуле (10.20).

Рассмотрим пример расчета.

Определим вероятность отказа внеиентренно сжатого стального стержня, изображенного на рис. 10.6.

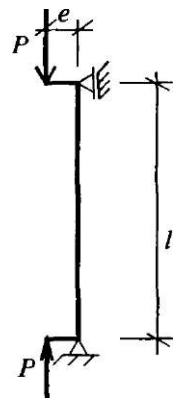


Рис. 10.6

За отказ в работе стержня примем появление краевой текучести. При выполнении вероятностных расчетов прежде всего необходимо иметь детерминированное решение. Будем исходить из упрошенного подхода к расчету сжато-изогнутых стержней, в котором искривленная ось стержня принимается за синусоиду. При этом сжато-изогнутый стержень сводится к системе с одной степенью свободы, что не вносит большой погрешности в результаты расчета и приемлемо для практики.

При сделанных предположениях максимальный изгибающий момент в стержне выражается известной формулой:

$$Л/_{„} = — у - г, \qquad (10\text{-}27)$$
$$/РЭ$$

где $Pe = M_0$ — тот же момент, но определенный без учета изгиба стержня, возникающего в результате действия продольной силы; Р — осевая сжимающая сила; е — эксцентриситет приложения силы; $P_э$ — первая эйлерова критическая сжимающая сила:

(10-28)

/ — свободная длина стержня; EJ — жесткость поперечного сечения стержня.

Краевое напряжение в расчетном сечении стержня равно

$$= \frac{L}{\sim} \quad \frac{K}{F^{+} \; W'} \tag{10.29}$$

или с учетом формулы (10.27)

$$= - + \cdot \frac{Pe}{W\backslash 1} \tag{10.30}$$

где W — момент сопротивления; F — площадь поперечного сечения.

Расчетная формула прочности сжато-изогнутого стержня, положенная в основу обычных практических расчетов, имеет вид

$$"max \quad p \quad " \quad \frac{Pe}{W \; 1 \quad P1} \quad <3"T ! \tag{10.31}$$
$$n^{l}EJ)$$

где cr_x — предел текучести стали.

Тогда функция работоспособности будет

$$g \quad = \quad {}^{\circ}T\text{-}J \quad \frac{Pe}{W\backslash\backslash\text{-}} \quad P1^2 > \tag{10.32}$$
$$n^2EJ,$$

Примем внешнюю нагрузку P и предел текучести a_z в качестве нормально распределенных случайных величин. Так как функция работоспособности нелинейна относительно случайной нагрузки, то для нахождения математического ожидания и стандарта случайной величины g применим метод статистической линеаризации. Для этого вычислим частные производные функции работоспособности (10.31) по ее случайным аргументам:

$$За \text{ т} = 1; \quad \frac{\partial P}{} \quad \frac{F}{W\backslash\backslash\text{-}} \quad \frac{}{P1^2} \tag{10.33}$$
$$n^2EJ$$

Для математического ожидания величины g в соответствии с (10.25) получим выражение:

$$m_{„} \quad m_{\partial m} \quad \frac{m_P}{p^{-}} \quad \frac{m_e e}{} \tag{10.34}$$
$$w\backslash \; 1 \; - \; {}^{mpl} \; 2^{\wedge}$$
$$n^2EJ)$$

Разложение функции выполняется в окрестности математического ожидания, т.е. при $сг_x = m_{ay}$ и $P = m_P$, поэтому для стандарта получим:

(10.35)

$$K)' \quad F \quad W \quad m_P l \; I \setminus \; я \; EJ) \;))$$

Определив m_g и S_g, по формуле (10.20) вычисляем вероятность безотказной работы внецентренно сжатого стержня.

Пусть дан внецентренно сжатый стержень в виде сварного стального двутавра.

Геометрические характеристики сечения: площадь поперечного сечения F= 48-Ю"^{4} м^2; момент инерции сечения 1_X = 1920-Ю"^{8} м^4; момент сопротивления сечения W_x = 240-10~^{8} м ^{6};

Эксцентриситет приложения нормальной силы е =? 0.007 м; длина стержня / = 6 м.

Внешняя случайная нагрузка, распределенная по нормальному закону, имеет следующие параметры распределения: математическое ожидание m_P= 6.41 кН; стандарт распределения S_P= 64.1 кН.

Предел текучести стали, принимаемый также распределенным по нормальному закону, имеет параметры распределения: математическое ожидание m_c = 3-10^5 кН/м^2; стандарт распределения S_c = = 3-Ю^4 кН/м^2.

Подставляя соответствующие значения в (10.33), получим для математического ожидания m_g = 118582 кН/м^2. Для стандарта в соответствии с (10.34) получим S_g = 39447 кН/м^2. Тогда по (10.20) для вероятности безотказной работы получим:

$$P_S = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right) = \Gamma\Phi(\wedge) = \Gamma\Phi(3{,}006) = 0{,}99857.$$

Далее рассмотрим другой пример вероятностного расчета для статически определимой балки (рис. 10.5), когда функция работоспособности является нелинейной.

Возьмем те же исходные данные, но примем высоту балки h случайной нормально распределенной величиной с параметрами: математическое ожидание m_h = 0,1м; стандарт S_h = 0,001м. Тогда

функция работоспособности (10.15) относительно случайных аргументов будет нелинейной:

$$S = \sigma_T \quad \text{Ш}^{\text{ЬР1}}_{\text{I}m \bullet}$$

Применим метод статистической линеаризации и определим

$$\frac{4?}{} = 1; \quad \frac{\text{Й.}}{\partial P} \quad \frac{3/}{2bh^2} \quad ' \quad ch \quad bh^3$$

Следовательно

$$m_{,,} \quad \frac{\text{Ъ}m_P1}{2\ b(m_h)^2 >}$$

$$\frac{\text{ЗГ}}{\partial o\ ^}$$

$$\text{з/} \qquad 3\ mЛ$$

$$\text{I} \quad 2\text{A}(\text{«}_\text{A}\text{rJJ}$$

Подставляя значения, получим

$$/я, = 84000\ \text{кН/м}^2; \qquad = 28794\ \text{кН/м}^2.$$

Вероятность безотказной работы

Метод статистических испытаний. Производится достаточно большое число статистических испытаний, при этом на каждом испытании генерируются случайные реализации всех исходных величин по заданной программе с помощью ЭВМ. Проверяется условие (10.2), при его невыполнении фиксируется отказ. Далее процедура повторяется.

Частота появления отказа v рассматривается как оценка вероятности отказа Pj \

(10.36)

$$\boldsymbol{m}$$

где к — число отказов; т — общее число испытаний.

Метод крайне прост и универсален, однако он требует обязательного анализа близости оценки v к искомой вероятности Pf, которая зависит от числа испытаний m.

10.4. Определение высоты поперечного сечения статически определимой балки при заданной надежности — обратная задача теории надежности (задача № 28)

Рассмотрим однопролетную шарнирно опертую двумя концами балку длиной / постоянного прямоугольного поперечного сечения размерами ***bxh,*** при этом ***b = 2/3 И*** (рис. 10.5). Предположим, что балка нагружена сосредоточенной силой Р, приложенной в середине ее пролета.

Выполним числовой пример подбора высоты поперечного сечения балки, при заданной вероятности неразрушения, т.е. надежности, Н- 0.96; допуске на размер а = 0.015 и последующих исходных данных, приведенных в табл. 10.3.

Таблица 10.3

Случайная величина	Математическое ожидание, m_x	Среднеквадратичное отклонение, S^*	Коэффициент вариации, $V=S_x/m_x$
Предел прочности материала балки ст МПа	305.0	18.3	0.060
Действующая нагрузка ***P,*** МН	8-Ю"^{2}	2.8-10"^{3}	0.035
Пролет балки /, м	6.0	6. 10^2	0.01

В предельной стадии работы, т. е. при $P = P_{ПР}$, максимальное значение момента, возникающего в точке приложения внешней силы, определяется

$$M_{ПР} = P_{Пр1}$$

Максимальные напряжения вычисляются

$$\frac{M_{ПР}}{W_{пл}} = {}^{\circ}\text{T}>$$

где пластический момент сопротивления W_{nj1} определяется по формуле

$$W_{u\}1} = \frac{bh^2}{4} = \frac{2}{3}$$

Следовательно, предельные значения напряжений выражаются следующей зависимостью

Предположим, что нагрузка $P_{пр}$, пролет /, высота балки h и предел текучести материала балки $о_т$ являются случайными величинами.

Полагаем, что случайные величины $P_{пр}$, /, h подчиняются нормальному закону распределения с математическими ожиданиями $т_Р$, mi, ть и среднеквадратичными отклонениями S_P, $S/$, $S/$,. Плотности распределения этих величин имеют вид

$$A') = \frac{e^{\frac{(P_{np}-m_f f}{Spjhi}}}{5/V2Л} \cdot e^{\frac{e-*,)^2}{25?}} \qquad \frac{}{S_h y[2n} \cdot e^{\frac{}{2\,Si}} \qquad (10.38)$$

Для оценки надежности балки необходимо знать математическое ожидание и дисперсию нормального напряжения. Эти параметры находим на основе статистической линеаризации функции (10.37) в окрестности математических ожиданий аргументов. Этот прием часто используется при малых дисперсиях, когда коэффициент вариации $V = S/m < 0.2$.

В соответствии с (10.33) математическое ожидание нормального напряжения

$$m_a = f(m_P, m_h m_h) = \frac{3 m_p т_м l}{2 m h} . \qquad (10.39)$$

Дисперсия нормального напряжения определяется по формуле

$$\frac{да}{дP_{ПРУ\ игр}} \quad xSf + \frac{5a\,V}{дЮ} \quad ySi \qquad (10.40)$$

Зададимся параметром а допуска на высоту поперечного сечения балки, который равен некоторой доле математического ожидания высоты ть . Тогда по правилу «трех сигм»

$$3 S_h = a\, m_h \setminus \sim S_h = {}^{т_м} yL.$$

Подставив значение Sh в (10.40) и выполнив преобразования, получим окончательное выражение дисперсии нормального напряжения:

$$D(a) = \frac{5a}{5/*_j Р} \cdot \frac{3/}{2Л^3} \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial Л} \right)^2 \cdot \frac{9 Pi}{2Л^4} \cdot \frac{1}{4Ц} \{m^2_P sj, + mf sj + a^2 mj /я,^2). \quad (10.41)$$

При нормальном распределении действующих и предельных напряжений надежность балки определяется по формуле (10.20)

$$H = \backslash_+ Щ = \backslash_+ Ф \left(\frac{m(a_T) - /и(a)}{V l \wedge K M H} \right) \quad (10.42)$$

!де Ф[г] — интеграл вероятности (см. таблицу 10.1).

Выражение в скобках представляет собой уравнение связи. Подставив в него найденные значения $/я_0$ и S_a, согласно (10.39) и (10.41), и выполнив соответствующие преобразования, получим:

$$Z = \frac{2m_a m_h - Ъm \quad m,}{m l S l + \wedge s t f T f a S_,)^2 + (a т, т_р)^2]} \quad (10.43)$$

Вероятности безотказной работы $H = 0.96$ соответствует значение характеристики $z - 1{,}75$.

После подстановки

$$Ami + Bm\backslash + C = 0,$$

где

$$A = 4\text{-} Slz^2 - 4m_c = -367997{,}6;$$

$$B = 12 \quad m_a m_p m, = 1756{,}8;$$

$$C = 9\text{-} z^2 \backslash \wedge m, S_p)^2 + \{m_p S,)^2 + (\lessdot am, m_p) \quad - 9 \bullet \quad - -2{,}06376.$$

Получим

$$- 367997{,}6 \bullet /и_А^6 + 1756{,}8 \bullet m\backslash - 2{,}06376 = 0.$$

Из решения последнего уравнения получим

$$т_ы = 0{,}1278; \quad т\wedge = 0{,}1390.$$

Подставляем полученные значения в уравнение (10.43), получим:

при $m_h = 0{,}1278$; $z = -1{,}75$;

при $m_h = 0{,}1390$; $z = 1{,}75$.

Так как из (10.10) следует, что z в данном случае может принимать только положительные значения, следовательно, математическое ожидание высоты сечения будет равно m_h = 0.1390 м.

10.5. Расчет статически определимой балки на надежность — прямая задача теории надежности (задача № 29)

Для однопролетной статически определимой стальной балки длиной / = 2 м, свободно лежащей на двух опорах (см. рис. 10.5). Ширина поперечного сечения балки Ъ — 0.05 м, допускаемый прогиб $f_Л = \frac{/}{280} = \frac{\cdot 2}{280} = 0{,}00714$ м, и предполагая, что случайные величины: Р — внешняя сила, h — высота поперечного сечения, с — предел текучести материалов конструкции, распределены по нормальному закону, требуется определить:

1. Вероятность появления краевой текучести P_j.

2. Вероятность образования пластического шарнира и превращения конструкции в механизм (вероятность разрушения) P_j^{nP}.

3. Определить вероятность невыполнения условия жесткости балки, т.е. превышения

Принять случайными следующие величины: предел текучести $a_т$, внешнюю нагрузку Р и высоту сечения h.

Внешняя случайная нагрузка Р имеет следующие параметры распределения: математическое ожидание $m_P = 30$ кН; стандарт распределения $Sp = 3$ кН.

Случайный предел текучести crj- характеризуется параметрами: математическое ожидание $m_s = 2.4 \cdot 10^5$ кН/м^2; стандарт распределения $S_s = 2.4 \cdot 10^4$ кН/м^2.

Высота сечения имеет параметры распределения: математическое ожидание m_h = 0.1 м; стандарт распределения S^ = 0.001 м.

Решение

1. Определим вероятность появления краевой текучести P_j

Функция работоспособности имеет вид:

$$3P1$$

Так как функция работоспособности нелинейна относительно случайных аргументов, то применим метод статистической линеаризации. Определим частные производные

$$\frac{\partial g}{\partial c_{z}} = i; \qquad \frac{A}{\partial P} \qquad 2\,bh^{1} \qquad ch \quad btf'$$

Далее находим математическое ожидание и стандарт функции работоспособности

$$^{m}g = {}^{m}a - \frac{\text{Ъ}m_{P}1}{2\ \text{Ь}\{\text{щ}\text{У}^{2}>}$$

$$\text{да-г}$$

$$\text{Г}\ \underline{\text{Ъ}m_{z}1}$$

$$2\,b(m_{h})^{2} \qquad 4 \quad W$$

Подставив значения, получим

$$m_{g} = 60000\ \text{кН/м}^{2}; \quad S_{g} - 30215\ \text{кН/м}^{2}.$$

Вероятность безотказной работы

$$^{1} \quad 2 \quad \backslash^{s}g \quad ;$$

тогда вероятность появления краевой текучести

$$PJ = 1 - P_{S} = 1 - 0{,}9765 = 0{,}0235.$$

2. Определим вероятность образования пластического шарнира и превращения конструкции в механизм (вероятность разрушения)

г Г

Из табл. 9.1. следует, что для сечения в форме прямоугольника, пластический момент сопротивления прямоугольного сечения равен:

$$W_{x(пл)} = 1{,}5\ W_{x}.$$

Тогда функция работоспособности примет вид

$$P1$$

Применяя метод статистической линеаризации, получим

$$\frac{\underline{Sg}}{\text{да-т}}\ ^{\sim\ '>} \qquad \frac{Sg}{\text{дР}} \qquad \frac{I}{bh}\ ^{7>} \qquad \frac{\%}{\text{п}} \qquad \frac{2P1}{ch \cdot bh^{\text{Ч}}}$$

Для числовых характеристик функции работоспособности будем иметь

$$m_* = m_0 - \frac{T T \wedge T T}{b(m_h y} = \frac{1\,2\,0\,0\,0\,0}{} \text{ К Н М}$$

$$S_g = \sqrt{\left(S_{\sigma_T} \frac{\partial g}{\partial \sigma_T}\right)^2 + \left(S_P \frac{\partial g}{\partial P}\right)^2 + \left(S_h \frac{\partial g}{\partial h}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(S_{\sigma_T})^2 + \left(S_P\left(-\frac{l}{b(m_h)^2}\right)\right)^2 + \left(S_h\left(\frac{2m_P l}{b(m_h)^3}\right)\right)^2} = 26940 \text{ кН / м}^2.$$

Вероятность безотказной работы в данном случае принимает значение

$$> + \Phi \left(\frac{m_g}{g y}\right)$$

тогда вероятность разрушения

$$/ » / = 1 - 7 » = 1 - 0{,}9999958 = 4{,}2 \cdot 10^{-6}.$$

3. Определим вероятность превышения допускаемого значения прогиба *pyy*

Для рассматриваемой балки максимальный прогиб имеет место в середине пролета. Его значение можно определить одним из известных способов, например, по методу начальных параметров или по формуле Мора. В результате получим

$$/_{max} = \frac{P1^3}{48177'}$$

где E — модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м^2; I_x - момент инерции сечения, для прямоугольного сечения

$$x = \frac{bh^3}{12}$$

Функция работоспособности записывается в виде

$$g = v \setminus - f_m - \frac{0004 - mЁm}{4\,Ebh}$$

Из предыдущего выражения видно, что прогиб не зависит от предела текучести $<\tau_x$, а функция работоспособности нелинейна относительно случайных аргументов. Поэтому применяем метод статистической линеаризации.

Получим

$$Sg = \frac{/^3}{4Ebh^3}, \quad dg _ \frac{3Pl^3}{8h \quad 4Ebh^4}'$$

Для числовых характеристик функции работоспособности получим

$$m_g = 0,004 \cdot \frac{\hat{\wedge}\hat{\wedge}}{\textit{Щm„Ў}^3} \approx 0,00114 \text{ м};$$

$$S_P \approx \frac{1}{4\text{ЕЦ}m_к)^3)} \cdot \left\{ \frac{3_{я\,и}/3}{44\text{ЕЦ}m_к)')} - 1 \right\} \approx 0,0006264 \text{ м}.$$

Далее определяется **вероятность безотка**зной работы для принятого вида отказа

$$P_1 = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g - 0,00114}{0,0006264}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(1,820) = 0,9656,$$

тогда вероятность превышения допускаемого значения прогиба

$$P_{\backslash}^{fl} = 1 - P_s = 1 - 0,9656 = 0,0344.$$

Сведем полученные результаты в табл. 10.4.

Таблица 10.4

Вероятность отказа	Появление краевой текучести	Возникновение механизма (разрушение)	Превышение допускаемого значения прогиба
P,	$PJ = 0,0235$	$Pf = 4,2 \cdot 10^{-6}$	$P_{\backslash}^{a} = 0,0344$

Откуда следует, что потеря жесткости балки обусловлена наибольшей вероятностью.

10.6. Расчет поддерживающих устройств контактной сети (задача № 30)

Постановка задачи

На электрифицированных железных дорогах подвод электрической энергии к электроподвижному составу (электровозу, моторному вагону) осуществляется путем касания токоприемника электровоза контактных проводов. К устройствам контактной сети относят все провода контактных проводок, поддерживающие и

фиксирующие конструкции, а также опоры с деталями для их крепления в грунте. К устройствам воздушных линий относят* провода различных линий и конструкций для их крепления на ош> рах с контактной подвеской и на самостоятельных опорах.

Провода контактных подвесок удерживаются в необходимом и», ложении относительно оси пути с помощью опор, поддерживающи и фиксирующих устройств. Опоры располагаются в стороне от nyi на определенном расстоянии *от его* оси *(называемым* габаритом). Подвешивание проводов к опорам и закрепление их на определен ной высоте от уровня головки рельса производится с помощью под держивающих устройств.

Устройства контактной сети и воздушных линий, подвергаясь воздействиям различной природы, должны успешно им противосто ять, обеспечивая бесперебойное движение *поездов. Эти устройства* образуют специфические конструкции, которые рассчитываются помимо механических, на специфические нагрузки (значительные перепады температур, сильные ветры, гололедные образования и пр.). Еще одной отличительной особенностью таких конструкций является то, что контактная сеть, в отличие от других устройств электрифицированной железной дороги, практически не *имеет* ре-зерва, что необходимо учитывать в процессе проектирования, доби-ваясь возможно более высокой надежности ее в условиях эксплуа-тации.

На станциях и многопутных перегонах цепные подвески подве-шиваются на гибких (из тросов) или поперечинах (***AE***, ***LB***), кото-рые крепятся на опорах, устанавливаемых по обе стороны от пере-крываемых путей (рис. 10.7).

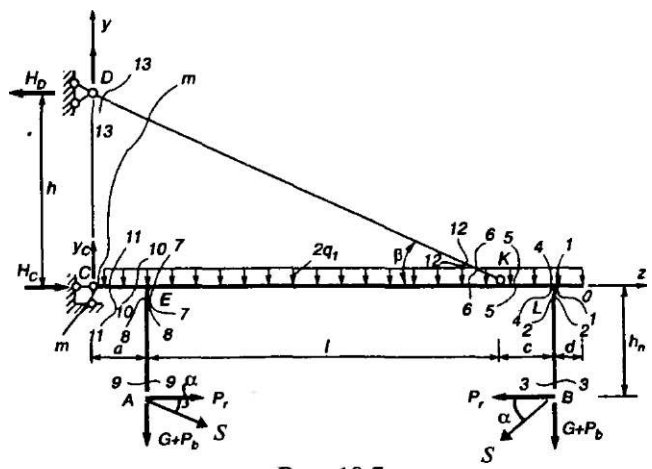


Рис. 10.7

В изображенной расчетной схеме контактной подвески (рис. 10.7) введены следующие обозначения^ — нагрузка от веса несущего провода; P_m — горизонтальная составляющая от веса несущего провода; р — угол наклона тяги по отношению к консоли; а — угол наклона между направлением усилия ***S*** и горизонтальным усилием $P_г$\ — вес погонного метра одного швеллера; G — вес одной подвески; $И_п$ — высота подвески; L — расстояние между опорами ***С и О.***

Принимая, что поперечное сечение консоли ***СО*** и подвесок ***АЕ*** и ***BL*** состоят из двух швеллеров, при следующих исходных данных:

а = 0.4 м; ***с*** = 0.4 м; ***d*** = 0.2 м; / = 3 м; ***L*** = 4 м; а = 20°; р = 30°; $й_п$ = 0.8 м; 5 = 1.6 кН;

для консоли (швеллер №8):

$(<?, = 7.05 \frac{кгГ}{м} = 0.0705 \frac{i<тН}{м}; /_x^к = 89.4 \cdot 10\sim^8 м^4; /j = 8.98 \cdot 10"^4 м^2;$

$W? = 22.4 \quad 10"^6 м^3);$

для подвески (швеллер №5):

$(q = 4.84 \frac{vF}{м} = 0.0484 \frac{irU}{м}; /_x^п = 22.8 \cdot 10"^8 м^4;$

$IV" = 9.1 \cdot 10"^6 м^3;$ $F_2 = 6.16 \cdot 10"^4 м^2$), от действия собственного веса и эксплуатационных нагрузок, требуется:

1. Проверить геометрическую неизменяемость системы.
2. Определить опорные реакции.
3. Вычислить величины внутренних усилий.
4. Проверить равновесие всех узлов.
5. Построить эпюры внутренних усилий.
6. Проверить прочность и устойчивость заданной системы.
7. Рассчитать надежность заданной системы.

Решение

1. Проверить геометрическую неизменяемость системы

Приступая к расчету всякой шарнирно-стержневой системы, необходимо убедиться в геометрической неизменяемости системы и определить степень статической неопределимости.

Для каждого узла шарнирно-стержневой системы (фермы, балки и т.д.) можно записать два уравнения равновесия: XZ = 0 и JY = 0. Пусть система содержит ***К*** узлов. Тогда для каждого из них можно составить ***2К*** уравнений равновесия, при помощи которых должны быть найдены усилия во всех стержнях системы и три неизвестные опорные реакции. Любые другие уравнения равновесия для отдельных частей системы могут быть получены из

этих уравнений, а потому не дадут новых условий для определения неизвестных усилий.

Следовательно, шарнирно-стержневая система будет статически определима, если число ее стержней С равно удвоенному числу узлов А" минус 3:

$$C = 2K - 3.$$

Чтобы определить степень статической определимости или неопределимости, необходимо учесть опорные стержни и опорные узлы. Тогда последнее условие примет вид

$$C + C_{оп} = 2(K + K_{оп}).$$

В нашем случае имеем $K = 1$, $C = 2$, $C_{оп} = 4$, $K_{оп} = 2$. Тогда

$$2 + 4 = 2(1+2); \qquad 6 = 6.$$

Следовательно, все стержни данной статически определимой системы являются, с точки зрения геометрической неизменяемости, безусловно необходимыми, т.е. в этой системе нет ни одной лишней связи.

2. Определить опорные реакции

Вначале вычислим вес подвески, состоящей из двух швеллеров №5

$$G = lq_2 h_n = 2 \cdot 0.0484 \cdot 0.8 = 0.077 \text{ кН},$$

а также вертикальную и горизонтальную *составляющие нагрузки от* веса несущего провода S

$$P_в = S \cdot \sin a = 1.6 \cdot 0.342 = 0.547 \text{ кН};$$

$$P_Т = S \cdot \cos a = 1.6 \cdot 0.9397 = 1.5 \text{ кН}.$$

Далее определим усилие T в тяге DK. Для этого проведем сечение $m—m$ (рис. 10.7) и составим для отсеченной правой части уравнение $\sum M_{£}^{прав} = 0$:

$$-Th_r + \wedge\wedge - + Ga + G(L-d) + P_B a + P_{ti}(L-d) - P_Т h_a + P_Т h_B = 0.$$

Откуда, учитывая, что плечо hj усилия в тяге Т относительно точки C можно определить из геометрических соображений

$$Лг = (a + /)\sin p = (0.4 + 3) \cdot 0.5 = 1.7 \text{м},$$

определим

$$T = \frac{J L + Ga + G(L-d) + P_B a + P_B(L-d)}{hp} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0.0705 \cdot 4^2 + 0.077 \cdot 4 + 0.077 \cdot 2 + 0.547 \cdot 4 + 0.547 \cdot 2}{1.7}$$

$$* 2.205 \text{ кН}.$$

Теперь можно определить реакции в опорных узлах С и /). Вырезая узел **D** (рис. 10.7), можно определить составляющие реакции H_D, Y_D, возникающие в опоре **D.** Для этого составим уравнения равновесия узла £ Z = 0 и £ Y = 0

$$-H_D + T \cdot \cos P = 0;$$

$$Y_D - T \cdot \sin p = 0,$$

откуда

$$H_D = \Gamma \cdot \cos p = 2.205 \cdot 0.866 = 1.9095 \text{ кН};$$

$$Y_D = T \cdot \sin p = 2.205 \cdot 0.5 = 1.1025 \text{ кН}.$$

Для определения H_C и Y_C рассмотрим систему в целом (рис. 10.7) и снова составим два уравнения равновесия

$$Y.Y = Y_D + Y_c - 2q_l L - 2P_B - 2G = 0,$$

откуда

$$Y_c = -Y_D + 2q_l L + 2P_B + 2G =$$

$$= -1,1025 + 2 \cdot 0.0705 \cdot 4 - 2 \cdot 0.547 - 2 \cdot 0.077 = 0.71 \text{ кН}.$$

Из уравнения X-Z - 0 получаем

$$-H_D + H_C + P_T - P_T = o,$$

откуда

$$H_C = H_D = 1.9095 \text{ кН}.$$

После вычисления опорных реакций необходимо проверить правильность их определения.

Для этого проверим, удовлетворяется ли уравнение равновесия $Y.M_0 = 0$, (рис. 10.7):

$$(Y_c + Y_D)L - H_D h - (G + P_e) - (l + c + d) - (G + P_e)\, d - \wedge - = o.$$

Если учесть, что

$$h = (a + /) \operatorname{tg} p = (0.4 + 3) \cdot 0.547 = 1.96 \text{ м},$$

то получим

(0.71 + 1.102) • 4 - 1.9095 • 1.96 - (0.077 + 0.547) • (3 + 0.4 + 0.2) -

- (0.077 + 0.547) • 0.2 - $\frac{2 \cdot 0.705}{B - ?}$ = 0;

7.248 - 7.240 « 0.

Следовательно, опорные реакции вычислены верно.

3. Вычислить величины внутренних усилий

На расчетной схеме подвески (рис. 10.7) наметим характерные сечения: 1—1; 2—2; ... 13—13. Рассмотрим расчет усилий в участках, расположенных между характерными сечениями.

Участок О—L (0—1). 0 < г, < 0.2 м (рис. 10.8). Для определения неизвестных величин внутренних силовых факторов $Q_b N_b M_i$ составим три уравнения равновесия

1 ^ = 0; $Q_x - 2q_x$ г, =0;

I Z = 0; N, =0;

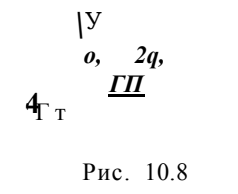


Рис. 10.8

Решая эти уравнения относительно неизвестных внутренних усилий, получим, что

$$Q\backslash = 2?!\ г,;$$

$$0;$$

$$M_l = z j.$$

При Zi — 0 имеем

$$Q_X = 0,\ N_t - 0;\ MI = 0.$$

При **Z\ =** 0.2 м следует, что

£?, = 2 • 0.0705 • 0.2 = 0.0282 кН; = 0;

Mi = -0.0705 • 0.2^2 = -0.0028 кН.

Участок В—L (2—3). 0 < z, < 0,8 м (рис. 10.9).

Из X Z = 0 следует, что

$Q_2 - P_T$ =0, т.е. $Q_2 = P_T$ = 1.5 кН.

Из £У = 0 имеем

$$- N_{1+} G + P_B = 0,$$

откуда

$N_2 = G + P_B$= 0.077 + 0.547 = 0.624 кН.

Рис. 10.9

Из $M_к = 0$ можно получить, что

$$M_2 + P_в Z_2 = О \text{ ИЛИ } M_2 = -P_в Z_2 .$$

При $z_2 = 0$ будем иметь $M_2 = 0$.

При $z_2 = 0.8$ м получим: $M_2 = -1.5 \cdot 0.8 = -1.2$ кН м.

Сечение 4—4 $TA = 0.2$ м (рис. 10.10).

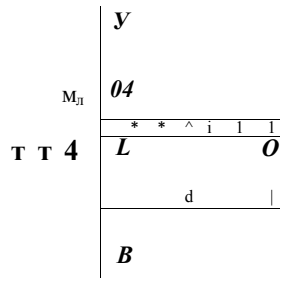


Рис. 10.10

Из $\sum Y = 0$ следует, что

$$Q_4 - 2q_i 0.2 - (G + P_в) = 0,$$

откуда

$Q2 = 2 \cdot 0.0705 \cdot 2 + 0.624 =$

$= 0.652$ кН.

Рассматривая $\sum Z = 0$, получим

$N_4 = 0$, т.е.

$N_4 = -P_Г = -1.5$ кН.

Из $\sum M_4 = 0$ следует, что

$$M_4 + P_m \cdot 0.8 + \frac{2 q_i o - 2 2}{} = 0,$$

откуда

$$M_4 = -(P_г \cdot 0.8 + q_x \cdot 0.2^2) = -(1.5 \cdot 0.8 + 0.0705 \cdot 0.2^2) = -1.2028 \text{ кН м}.$$

Участок L—К (4—5), $0.2 < Z_5 < 0.6$ м (рис. 10.11).

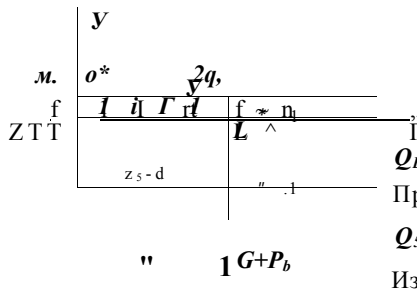


Рис. 10.11

Из $\sum У = 0$ следует, что

$$Q_5 - 2 q_x z_5 - (G + P_в) = 0, \text{ т.е.}$$

$$б_5 = 0.141 \cdot z_5 + 0.624.$$

При $z_5 = 0.2$ м

$Q_в = 0.141 \cdot 0.2 + 0.624 = 0.652$ кН.

При $z_5 = 0.6$ м

$Q_5 = 0.141 \cdot 0.6 + 0.624 = 0.708$ кН.

Из $\sum Z = 0$ имеем

$$-N_5 - P_г = 0, \text{ откуда:}$$

$N_5 = -1.5$ кН.

Из $\sum M_5 = 0$ можно получить, что

$$M_5 + (L + J) P_г \cdot 0.8 + (G + P_E) \cdot (z_5 - 0.2) = 0,$$

откуда имеем

$$M_5 = \quad + P_r.Q.\% + (G + P_B)\text{-}(z_5 - 0.2)$$

При Zs = 0.2 м

$$M_5 = -\frac{0.141 \quad 0\,2^2}{} + 1.5 \quad 0.8 + 0624 \quad (0.2\text{-}0.2) \qquad -1.2028 \text{ кНм.}$$

При Zs = 0.6 м

$$M_5 = -\frac{0.141 \cdot 0.6^2}{} \quad 1.5 \quad 0.8 + 0.624 \cdot (0.6 - 0.2) = -1.475 \text{ кНм.}$$

Участок К - Е . $0.6 < z_6 < 3.6$ м (рис. 10.12).

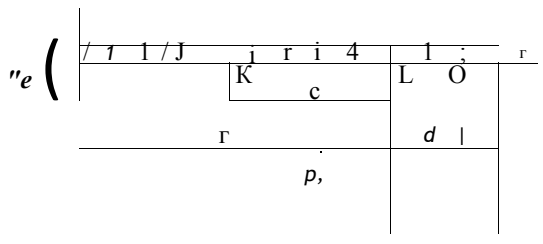


Рис. 10.12

Из Y. Y ~ 0 следует, что

$$G_6 \text{-} 2\,?!\ r_6 \text{-} (G + P_B) + r \sin p = 0,$$

откуда

$$0_6 - +2 <?,\ r_6 - (C + />_{„}) - T \sin p = 0.141 \cdot r_6 + 0.624 - 2.205 \quad 0.5.$$

При Z6 = 0.6 м

$$Q_6 = 0.141 \quad 0.6 + 0.624 - 2.205 \cdot 0.5 = -0.394 \text{ кН.}$$

При Z6 = 3.6 м

$$\text{£>}_6 = 0.141 \quad 3.6 + 0.624 - 2.205 \cdot 0.5 = -0.0291 \text{ кН.}$$

Из X $Z = 0$ следует, что

$$N_6 + T \cos p + P_z = 0,$$

откуда

$$N_6 = -(T \cos p + P) = -(2.205 \cdot 0.866 + 1.5) = -3.4095 \text{ кН.}$$

Из X = 0 можно получить, что

$$M_6 - T h_z + \quad + P_z \cdot 0.8 + (G + P_6) \cdot (Ze - 0.2) = 0,$$

откуда имеем

$$M_b = mu_z - \quad _ p_m . 0.8 _ (G + P_в) \cdot (г_6 - 0.2),$$

где $h_z = (z_6 - 0.6) \sin p = (z_6 - 0.6) \cdot 0.5.$

При Zb = 0.6 м

$$M_6 = 2.205 \ (0.6 - 0.6) \ 0.5 \ \frac{0.141 - 0.6''}{} - 1.5 - 0.8 - 0.624 \ (0.6 - 0.2) =$$

$$= 1.475 \text{ кН м.}$$

При Zb — 3.6 м

$$M_6 = 2.205 - (3.6 - 0.6) \cdot 0.5 - \frac{0 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \text{ м } 6}{2} — 1.5 \cdot 0.8 - 0.624 \cdot (3.6 - 0.2) =$$

$$= 0.9278 \text{ кН м.}$$

Участок Е—А, $0 < г_8 < 0.8$ м (рис. 10.13).

Из £ 2 = 0 следует, что

$$Q_s + P_r = 0,$$

откуда

$$Q_s = - P_г = - 1 - 5 \text{ кН.ч}$$

Из £ $Y = 0$ следует, что

$$N_S - (G + P_B) = 0,$$

откуда

$$N_S = (G + P_к) = 0.624 \text{ кН.}$$

Из $Y.$ Л/g = 0 можно получить, что

Л/$_8$ - $P_Г$ Zt = 0, откуда имеем:

$$M_b = P_T Z_S = 1\text{-}5 \cdot z_s -$$

При ze = 0: $M_s = 1.5 \cdot 0 = 0.$

При Z6 — 0.8 м:

Участок Е—С. $0 < z_9 < 0.4$ м (рис. 10.14).

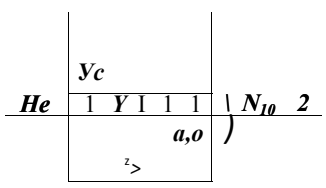


Рис. 10.14

Из = 0 следует, что

$$Ус - Ою \sim 2 \quad Ц = о,$$

откуда

$$Qio = Y_c - 2 q_x z_9.$$

При $z_9 = 0$: $Q_w = Y_C = 0.71$ кН.

При Zb = 0.8 м:

$Q_{10} = 0.71 - 0.141 - 0.4 = 0.6536$ кН.

Из £ Z = 0 следует, что

$\#_C$ - Л % = о,

откуда

$$N_{l0} = H_C = 1.909 \text{ кН}.$$

Из X M_{10} = 0 получим, что

- M_{l0} + $У_c$ z_9 - = 0, откуда имеем M_{10} = $У_c$ z_9 - .

При Z9 = 0: M_{10} = 0.

При $г_9$ = 0-4 м: M_{10} = 0.71 • 0.4 - $\frac{0141 - 04^2}{}$ = 0.2727 кН м.

4 Проверить равновесие всех узлов

После вычисления значений изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в характерных сечениях необходимо проверить равновесие всех узлов.

Рассмотрим равновесие узла ***L***. Вырежем угол ***L*** и составим уравнение равновесия £ M_L = 0, которое описывает равновесие узла L\

$$- M_4 + M_2 + Mi = 0;$$
$$- 1.2028 + 1.2 + 0.0028 = 0;$$
$$0 = 0.$$

Следовательно, узел ***L*** находится в равновесии.

Узел ***E***. Составив уравнение £ M_E = 0, получим

$$M_{l0} + M_7 - M_S = 0;$$
$$0.2727 + 0.9278 - 1.2 = 0;$$
$$0 = 0.$$

Следовательно, узел ***E*** находится в равновесном состоянии.

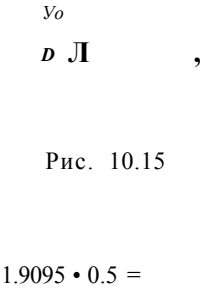


Рис. 10.15

Рассмотрим равновесие узла D (рис. 10.15).

Здесь Y. M_D =0.

Из X У =0 следует, что

C?i3 + YD ^{cos} P ~ HD P -

откуда

$$C?3 = \sim^{Y}D \cos P + H_D \sin p = -1.102 \cdot 0.866 + 1.9095 \cdot 0.5 =$$
$$= -0.9343 + 0.954 = 0.0197 \approx 0.$$

Из £ Z = 0 следует, что

$$N_a - H_D \cos /? - У_c \sin /? = 0,$$

откуда

$$N_i з = H_D co\&p + Y_D \sin/7 = 1.9095 \cdot 0.866 + 1.102 \cdot 0.5 » 2.205 \text{ кН}.$$

Таким образом, все узлы исходной системы находятся в равновесии.

5. Построить эпюры внутренних силовых факторов

Зная значения внутренних силовых факторов в каждом характерном сечении консольной подвески, можно построить эпюры Q, N, M_p (рис. 10.16). Условимся, что ординаты изгибающих моментов будем откладывать со стороны растягивающих волокон.

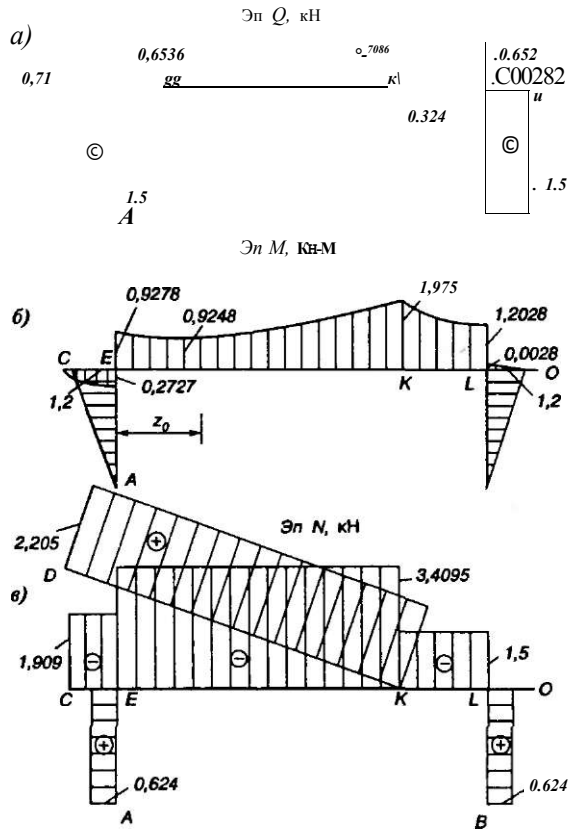


Рис. 10.16

Следует заметить, что для построения указанных эпюр необходимо вычислить значения изгибающих моментов еще в нескольких характерных сечениях, в которых они достигают экстремальных значений, а также в середине криволинейных участков эпюры моментов.

Анализируя эпюру поперечных сил, можно заметить, что на участке К—Е имеется сечение, в котором $Q = 0$. Используя известное положение о том, что $\frac{dM}{dz} = Q$, можно вычислить на указанном участке значение изгибающего момента, приравняв $Q = 0$. Тогда в этом сечении изгибающий момент примет экстремальное значение.

В нашем случае (рис. 10.17):

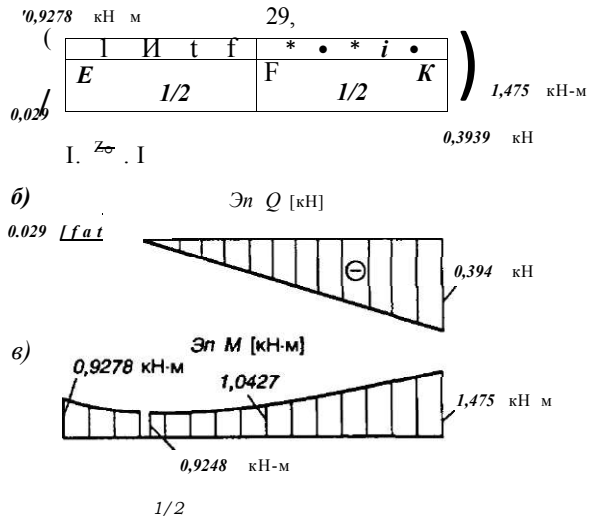


Рис. 10.17

$$\frac{dM}{dz} = Q = 0.0291 - 0.141 z_0 = 0,$$

откуда

$$z_0 = \frac{0.0291}{0.141} = 0.206 \text{ м}.$$

Тогда

$$M_{ext} = 0.0291 \cdot 0.206 - 0.9278 - \frac{0.141 \cdot 0.206^2}{} = -0.9248 \text{ кН м}.$$

Вычислим величину изгибающего момента для сечения F. расположенного в середине участка К—Е (рис. 10.17), при $z = \wedge = 1\text{-}5$ м:

$$M_F = 0.0291 \cdot 1.5 - 0.9278 - \frac{0.141 \cdot 1.5^2}{} = -1.0427 \text{ кН м}.$$

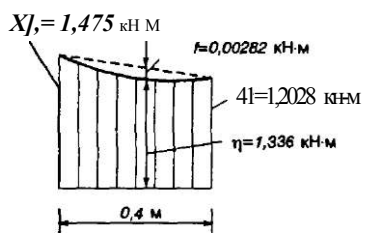


Рис. 10.18

Для участка К—L ординату изгибающего момента в середине длины балки можно вычислить иначе, определив предварительно величину стрелки/(рис. 10.18).

Здесь:

$$f = \frac{2\partial_x a^2}{8} = \frac{0.141 \quad 0.4^2}{8} =$$

$$= 0.00282 \text{ кНм}.$$

Тогда, согласно рис. 10.20, будем иметь:

$$\frac{1.475 + 1.2028}{8} - f = 1.3389 - 0.00282 = 1.336 \text{ кН м}.$$

6. Проверить прочность и устойчивость заданной системы

Наиболее опасным, согласно эпюр внутренних усилий, является участок консоли в сечении 6—6 (рис. 10.19). Пренебрегая величинами поперечных сил, определим значения нормальных напряжений в наиболее опасном сечении

$$\frac{N_a}{2F} \quad \frac{M_{x_1}}{2W_x} \qquad \frac{3.4095}{2 \cdot 8.98 \cdot 10^{-4}} \qquad \frac{1.475}{2 \cdot 22.4 \cdot 10^{-6}}$$

$$0.1898 \cdot 10^4 - 0.0329 \cdot 10^6 = -0.348 \cdot 10^5 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2},$$

Условие прочности выполняется, так как

у,

$$|\sigma| = 0.348 \quad 10^5 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} < R_н = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Участок консоли от сечения 6 до 7 подвергается внецентренному сжатию силой $N = 3.4095$ кН. Поэтому этот элемент следует проверить на устойчивость.

Рис. 10.19

Вначале вычислим гибкость Я, полагая концы стержня 5—6 шарнирно закрепленными. В этом случае коэффициент приведенной длины р = 1.

Известно, что гибкость вычисляется по формуле

$$\lambda = \mu l / i_{min}$$

Радиусы инерции сечения вычисляются по формулам:

$$i_x = \sqrt{J_x / F}, \quad i_y \quad \text{и} \quad i_{min} = \min(i_x, i_y).$$

Для заданного сечения консоли (швеллер № 8) величину радиуса инерции i_x можно взять из соответствующей таблицы сортамента для прокатных профилей сталей.

В нашем случае: $i_x = 3.16\ 10^{-2}$ м.

Что же касается возможной потери устойчивости относительно центральной оси y\, то, согласно теореме о переносе осей инерции, необходимо вычислить величину / (см. рис. 10.19).

Тогда

$$J_{yi} = 2J_y + 2Fz_0 = 2 \cdot 12.8 \cdot Ю^{-8} + 2 \cdot 8.98 \cdot 10^{-4} \cdot (1.31 \cdot 10^{-2})^2 =$$

$$= 56.42 \cdot 10^{-8}\ м^4.$$

Здесь Zo — расстояние между осями y и y\ (рис. 10.19): $г_0 = 1.31 \cdot 10^{-2}$ м.

Далее вычисляем радиус инерции i_y относительно оси y\.

$$/ , - Ё . \qquad - 1.77\text{-}1^{\wedge} м.$$

$$^{л}\ y\ 2F \quad v\ 2 - 8.98\ \ 10^{-4}$$

Так как $i_x > i_{yi}$, то потеря устойчивости вероятнее всего произойдет относительно оси для которой

$$'mm = min\{/_x,^{\wedge}\} = i_{yi} = 1.77 \cdot 10^{-2}\ м.$$

Для выбора расчетной формулы для вычисления нормального напряжения, надо сначала вычислить величину гибкости X

$$X = \frac{l_{\text{выч}}}{i_{min}} = \frac{1.77}{1.77\ Ю^{-2}} = 169.5.$$

Так как полученное значение гибкости X больше 100, то можно применить формулу Эйлера:

$$o = \frac{N}{cp2F},$$

где ф - ц>(х) — коэффициент уменьшения расчетного сопротивления при расчете на сжатие. Коэффициент ср зависит от гибкости X и выбирается по таблицам СНиП II-В.3-62. Если гибкость X не совпадает с табличными значениями, то приходится производить интерполяцию.

В нашем случае для Ст-2.4 имеем при X = 160, ср = 0.29, а при ***X = 170, ср = 0.26.***

Для X = 169.5 имеем

$$ф = 0.26 + \frac{0.29 - 0.26}{170 - 160} \cdot (по - 169.5) = 0.268.$$

Вычисляя напряжение, получим:

$$\frac{3.4095}{0.262\text{-}2\text{-}8.98\ КГ^4} \quad {}^{ft(Wt}0.073 \cdot 10^5 \frac{кН}{м^2} < \overline{Я}, = 1.9 \cdot 10^5 \frac{кН}{м^2}$$

Следовательно, устойчивость очень большим запасом обеспечена.

Подвески E—A и L—B растянуты силой $N = 0.624$ кН. Нормальные напряжения в них равны:

$$o = \frac{N}{2F} = \frac{0.624}{2 \cdot 6.16 \cdot 10^{-4}} = 0.05 \cdot 10^4 \frac{кН}{м^2} < a,$$

где $[o] = 16 \cdot 10^4$ кПа.

Следовательно, прочность обеспечена с большим запасом.

Диаметр тяги круглого сечения вычислим, используя формулу:

$$a = \frac{T}{F} < [o] \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{T}{nd^2}} < [o],$$

4

откуда:

$$d = \sqrt{\frac{4T}{n[o]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2.205}{3.14 \cdot 16 \cdot 10^4}} = 0.118 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 4.2 \text{ мм}.$$

Из таблиц ГОСТа на круглую стальнукгпрутковую сталь принимаем диаметр тяги контактной подвески величиной $d = 5$ мм.

7. *Рассчитать надежность заданной системы*

Как показал изложенный выше анализ, система в целом весьма чувствительна к усилию T в тяге DK. В случае выхода из строя тяги система превращается в механизм и разрушается. В п.1 было получено выражение для определения усилия в тяге DK:

$$T_m = \frac{q_t L^2 + G(L + a - d) + P_B(L + a - d)}{(я + /) \sin p}$$

Значение напряжения в тяге определяется $a = \frac{T}{F}$, где F — площадь поперечного сечения тяги. Тогда предельное значение напряжения определяется следующей зависимостью:

$$F \geq \frac{T}{(a + 1\} \sin p} \quad (0.44)$$

Предположим, что нагрузка $q_{пр}$, $G_{пр}$, $P_{пр}$, размеры ***поперечного*** сечения троса F, предел текучести материала тяги $с_т$ и геометрические характеристики конструкции контактной подвески ***L,l,a,d,$*** являются случайными величинами. Полагаем, что случайные величины $o_T,q_{пр},G_{пр},P_{пр},F$,L,l,a,d,fi подчиняются нормальному закону распределения с математическими ожиданиями и среднеквадратичными отклонениями m_{it} S,(i = 1, 2,..., 10).

Для оценки надежности конструкции необходимо знать математическое ожидание и дисперсию нормального напряжения, возникающего в тяге. Эти параметры находим на основе статистической линеаризации функции (10.44) в окрестности математических ожиданий аргументов.

Математическое ожидание нормального напряжения

$$m_q\text{-}m^2_L + [m_G + m_P) \cdot (m_L + m_a - m_d) \over m_F(m_a + m,)\sin m_p \qquad (10.45)$$

Дисперсию нормального напряжения определим, разлагая и удерживая в разложении в ряд Тейлора первые два члена

$$\text{ю} \left| \frac{\partial a}{3Cj} \right|_{x,=m,} \Bigg| St. \qquad (10.46)$$
$$,=1$$

Если обозначить a = x,, $q_{пр} = x_2$, $G_{пр}$ = x_3, $P_{пр} = x_4$, F = x_5, $L = x_6$,l = x_7, a = x_8, d = x_9, (3 = x_{10}, то в этих обозначениях формула (10.45) перепишется в виде:

$$m \quad {}^{m}2 \; ' \; {}^{m}1 \; {}^{+} \; \{{}^{m}3 + ц) \cdot \{{}^{m}ь + {}^{m}s - {}^{m}э) \over m_5(m_8 + т_1)\sin т_{]0} \qquad (10.46)$$

Зададимся параметром а допуска на площадь поперечного сечения тяги, который равен некоторой доле математического ожидания поперечного сечения тяги Тогда, согласно правилу «трех сигм»,

$$3S_F = \text{а},\ m_F \text{ откуда } S_F = \frac{\text{—}}{\text{—}}.$$

С учетом (10.47) формула (10.46) перепишется в виде:

$$= \frac{ml}{т_5(т_7 + m_8)\sin т_{]0}} St + \frac{}{т_5\{m\text{-}, + m_8)\sin m_w}$$

$$\frac{m_6 + m_s - m,}{m_s(m_7 + ш)\sin m_{10}} \quad \frac{2m, \cdot m, + m, +}{m_5(m_7 + m_8)\sin m_{10}} \; *_6^2 +$$

$$\frac{(m_g + m_7)\sin m_{10}Jm_2 \cdot ml + (m_3 + m_4)(m_6 + m_g - m_9)|}{тЦт\text{-}j + m_8)^2 \sin^2 w_{10}} \; a^2 m]$$

$$\frac{m_s \sin \quad \cdot mj + (m_3 + m_4)(m_6 + m_8 - m_9)j}{m]\{m_1 + m_g)^2 \sin^2 m_{10}}$$

$$\frac{m_s \sin \quad Стщ\hat{}\hat{}б^{+} \quad +m_4)(^m6 + ^m s \sim \hat{}9)]}{mЦm_1 + m_8) \quad \sin^2 m_{10}} \; sl +$$

$$\frac{- \quad + m_4)}{m_s(m_7 + m_8)\sin m_{10}} \; Si +$$

$$\frac{m_5(m_g + w_7)\cos w,_0|m_2m\hat{} + (m_3 + m\hat{}m_6 + m_s - m_9)j}{m^2(m_7 + Wg)^2 \sin^2/\%} \; <Г^2$$

(10.48)

Сначала определим надежность рассматриваемой конструкции, принимая коэффициент вариации площади поперечного сечения тяги равным а, =0.015. Вероятностные параметры остальных случайных величин обобщены в табл. 10.5.

Таблица 10.5

1	Случайная величина	Математическое ожидание $т_x$	Среднеквадратичное отклонение	Дисперсия D_x
1	Предел прочности тяги $а_т$, кН/м^2	1,6 10^5	8-Ю^3	64 10^6
2	<7пр. кН/м	0.0705	7.05 Ю-^{3}	4.97 10^s
3		0.077	7.70-10"^{3}	5.93 10^5
4		0.547	5.47 Ю-^{2}	2.99 Ю^3
6	$Z_„$ м	4.0	0.4	0.16

Продолжение табл. 10.5

i	Случайная величина	*Математическое* ожидание m_x	*Среднеквадратичное* отклонение S_x	Дисперсия Ac
7	I, M	3.0	0.3	0.09
8	*а, м*	0.4	0.04	0.0016
9	$d, м$	0.2	0.02	0.0004
10	Р,рад (°)	0.5236 (30)	0.05236 (3)	0.00274 (9)

Математическое ожидание площади поперечного сечения тяги в данном случае принимает значение

$$nd? _ 3,14(4,2\text{-Ю-}^3) = 13,85 \cdot 1(\Gamma^6 \text{ м}^2$$

Подставляя исходные данные в (10.47), откуда определяется математическое ожидание напряжений в тяге

$$\text{т} = \frac{0,\overline{0705\text{-}4^2} + 0,\overline{624\ \text{-}4,2}}{13,85 \cdot 10''^6 \cdot 3,4 \cdot 0,5} = \text{'}1,5925 \cdot \text{1}^{\text{пр}}\text{f0}^{\text{ц}}\ \text{кН'/ м}^2.$$

Для определения дисперсии напряжений в тяге KD выражение (10.48) представим в более удобной форме

$$\text{Д.} - \frac{1}{\text{m}^2(\text{m}_7 + \text{m}_8)\ \sin^2 \text{т}_\text{ю}} \Big[\text{-)}\textit{m\$D}_2 + (\textit{m}_6 + \textit{m}_8\text{- ш})\ (\textit{D}_3 + \textit{Z}\text{>}_4) + \text{(т}_3 + \textit{m}_4)^2\ \textit{D}_9 + (2\text{m}_2\text{m}_6 + \text{m}_3 + \text{m}_4)^2\ \text{Z)}_6\ \text{j}$$

$$\textit{m}_2\textit{ml} + (\text{m}_3 + \text{m}_4)(\text{m}_6 + \text{m}_8 - \text{m}_9)\text{f} \quad \text{J_ X}$$

$$^{\text{m}}5\ (^{\text{m}}7\ ^{+}\ ^{m}\textit{S})\quad ^{\text{S}}\text{i}\circ^4\ \text{«10}$$

$$(\text{m}_7 + \text{w}_8) \quad + \textit{D}_7 + \textit{D}_s + (\textit{m}_1 + \text{m}_8)\ \text{A}_0\text{ctg}'\ \textit{m}_{10}\ \text{m}_5\ \text{sm}\ \text{m}_{10}.$$

Откуда определяется

$$\text{D} \cdot - \frac{[4^4 \cdot 4,97 \cdot \text{Ю}^{-5} + 4,2^2 \cdot (2,99 + 0,0593)10\text{-}^3 +}{13,85^2 \cdot 10^{-12} \cdot 3,4' \cdot 0,25}$$

$$+ 0,634^2 \cdot 4 \cdot \text{lO-}^4 + \text{(2 - 0,0705} \cdot 4 + 0,624\text{Г0,16} + \text{-i} \frac{(\text{0,705} \cdot 4^2 + \text{0,624} \cdot 4,2)^2}{13,85^{\text{s}} \cdot 10''^{\text{T}\cdot} \cdot 3.4 \cdot 0,25}$$

$$3{,}4^2 \ \text{т тс if)-4} + 0{,}0916 + 3{,}4^2 \cdot 1{,}707^2 \cdot 2{,}74 \cdot 10^{-3} \cdot 13{,}85^2 \cdot Ю^{-12} \ 0{,}25 =$$

$$554{,}37^{10^{12}} \cdot (0.0127 + 0{,}0538 + 0{,}00016 + 0{,}2258) + {}^{1Q4?\ Ш^{12}}_{307323} \cdot (0{,}000289 \cdot$$

$$+ 0{,}0916 + 0{,}923) \cdot 47{,}956 = 1{,}804 \cdot 10^9 \ 0{,}29246 + 30{,}1 \cdot 10^9 \cdot 0{,}184 =$$

$$= (0{,}5276 + 5{,}544)10^9 = 6072 \cdot 10^6.$$

Характеристика безопасности из (10.10) в данном случае приобретает значение

$$Z \sim JD_1 + D_a \sim J64\text{-}10^6 + 6072 \cdot 10^6 \ " \ 7834 \ 10^3 \sim \frac{1{,}6 \ 10^s\text{-}1{,}5925 \ 10^s}{} \ 750$$

Следовательно, надежность из (10.10) с учетом табл. 10.1 принимает значение Н = 0,501.

Целью повышения надежности, в качестве материала тяги KD возьмем сталь с характеристиками: /и, = $2{,}0 \cdot 10^5$ кН / м^2; $D_x = 10^8$ кН / м^2.

При этом

$$_ \ \frac{2{,}0 \ 10^s \text{-}1{,}5925 \text{-}10^s}{} = \frac{40750}{} = \ ^{\wedge}$$

$$л/Ю0 + 6072 \ 10^3 \sim 78{,}56 \ 10^3$$

Следовательно, с учетом (10.10) надежность заданной системы в данном случае принимает значение

$$Я = 0{,}5 + Ф(0{,}52) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7.$$

В заключение, применительно к заданной системе, рассмотрим, решение обратной задачи теории надежности, т.е. принимая надежность заданной системы Н - 0,96, определяем значения математического ожидания площади поперечного сечения тяги $т_5$.

В данном случае уравнение связи запишем в виде

$$\underline{Z} = \frac{m. — /u_{„}}{l} \cdot \qquad (10.49)$$

Подставляя значения m_a и D_c из (10.47) и (10.48) соответственно в (10.49) после ряда преобразований, получим

$$\underline{\quad} \ \frac{m,m_5(m_7 + m_8 \sin m_{10} - K_2)}{JZ),m^2(m_7 + m_8) \ \sin^2 m_{10} + AT,} \qquad (10.50)$$

где приняты следующие обозначения:

$$^{к}\backslash = \quad \boldsymbol{K^{D}i} + (\text{«}6 + \boldsymbol{ш} - \text{ю}_{9})^{2}(\text{A}^{+}\text{A}) +$$

$$+ \{1m_{2}m_{ь} + m_{ь} + m_{4})^{2} D_{b} + (m_{3} + m_{4})^{2} D_{g}$$

$$\frac{a^{2}}{^{9}} \quad \frac{D_{I+} A}{[\text{щ} + m_{s})^{2}} + A_{0}ctgm_{\text{ЯО}} Kb$$

$$K2 = + (/и_{3} + /п_{4})\{/п_{6} + /и_{8} - /и_{9}).$$

Разрешая уравнение (10.50) относительно m_s, получим:

$$Am] - {}^{Bm}s + C = 0,$$

где приняты следующие обозначения:

$$A = z^{2}Di(m_{7} + m_{8})^{2}(m_{7} + m_{8})^{2} \sin^{2} m_{10};$$

$$B = 2m,(m_{7} + m_{s})K_{2} \sin m_{10};$$

$$C = г^{2}*, - *_{2}^{2}.$$

Как это следует из табл. 10.1, для обеспечения Н = ^.^необходимо принимать z = 1,75.

Далее последовательно определяется

$$/Г, = 4^{4} \cdot 4{,}97 \cdot 10"^{7} + 4{,}2(2{,}99 + 0{,}0593) \cdot 10"^{3} + (2 \cdot 0{,}0705 \cdot 4 + 0{,}624)^{2} \text{ x}$$

$$\text{x } 0{,}16 - КГ^{4} + 06624^{2} - 2 \cdot 10"^{6} +$$

$$+ \underset{\text{I 9}}{\quad} .10"^{4} + \underset{3{,}4}{\quad} -10"^{4} + 1{,}707 \cdot 2{,}74 \cdot Ю^{-3}$$

$$\text{x } 3{,}7488^{2} = 0{,}00558 + 0{,}1137 = 0{,}119;$$

$$K_{2} = 0{,}705 - 16 + 0{,}624 \cdot 4{,}2 = 3{,}7488;$$

$$A = (1{,}75^{2} \cdot 10^{8} - 400^{2} \cdot 10^{8}) \cdot 3{,}4^{2} \cdot 0{,}25 = -1147 \cdot 10^{8};$$

$$B = 2 \cdot 2 \cdot 10^{5} \cdot 3{,}4 \cdot 3{,}7488 \cdot 0{,}5 = 25{,}49 \cdot 10^{5};$$

$$C = 0{,}119 \cdot 1{,}75^{2} - 3{,}7488 = -3{,}384.$$

Из решения уравнения *(10.51)* определим

$$^{m}s(u) \quad \frac{25{,}49 \cdot 10^{5} \pm \text{V}649{,}74 \ 10^{10} - 155{,}26 \ Ю^{10}}{22{,}94 \cdot 10^{Ю}} \quad \frac{25{,}49 \pm 22{,}23}{22{,}94 \cdot 10^{5}}$$

откуда

$$т_{Я\,1)} = 2{,}08 \cdot 10\sim^{5} \text{ м}^{2}; \quad m_{5(2)} = 0{,}142 \cdot Ю^{-5} \text{ м}^{2}.$$

Второй корень уравнения (10.51) не имеет физический смысл, т.к. при подстановке т^ в уравнение -связи (10.50), получим = —1,75. Как это следует из (10.10), отрицательное значение z не может иметь место.

Математическое ожидание диаметра тяги при $/я_5 = т^$ принимает значения

что позволяет обеспечить требуемую надежность заданной системы на уровне H = 0,96 .

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте основные задачи теории надежности.
2. Что называется надежностью конструкций?
3. Что называется отказом конструкций?
4. Сформулируйте функции работоспособности конструкций.
5. Дайте определение, что такое математическое ожидание случайной величины.
6. Что такое дисперсия случайной величины и что она характеризует?
7. Сформулируйте понятие среднеквадратичного отклонения или стандарта случайной величины.
8. Что называется законом Гаусса?
9. Сформулируйте суть центральной предельной теоремы теории вероятностей.
10. Раскройте суть метода двух моментов.
11. Раскройте суть метода статистической линеаризации.
12. Раскройте суть метода статистических испытаний.

ГЛАВА 11

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Для глубокого усвоения курса, ниже по тематике каждого из вышеизложенных разделов, с целью закрепления полученных знаний даны семейства задач для самостоятельных и контрольных работ. Чтобы овладеть аппаратом настоящей дисциплины, студент должен после изучения соответствующего раздела курса самостоятельно ответить на поставленные вопросы и решить множество задач из заданного семейства.

Исходные данные по каждому семейству задач приводятся в табличной форме по столбцам. Это позволяет путем вариации исходных величин по строкам формировать большое количество задач по данному семейству. Для обеспечения ориентации в процессе решения контрольных задач номера методических примеров расчета по каждой теме и номера семейств задач совпадают.

При выполнении контрольных работ рекомендуется исходные данные для индивидуальных заданий брать из приведенных таблиц в строгом соответствии со своим личным шифром. При этом необходимо три последних цифры своего шифра написать дважды над буквами: *а, б, в, г, д, е.* Например, при шифре студента 98-ПГС-7468 это будет выглядеть так:

4 6 8 4 6 8
а б в г д е

Тогда цифра 4 над буквой «а» указывает на номер строки, где расположено числовое значение соответствующей исходной величины в столбце «а» и т.д.

11.1. Основные сведения. Расчет статически определимых систем

Семейство задач № 1 Расчет многопролетной шарнирной балкн

Пятиопорная шарнирная балка (рис. 11.1) состоит из четырех балок (дисков), соединенных тремя шарнирами, указанными на схемах балок. Балка загружена по всей длине расчетной рав-

номерно распределенной нагрузкой ***q.*** Расстояния сечений 1, 2, 6, 7, 11, 12, 16, 17, 21, 22 до ближайших опор следует считать бесконечно малыми.

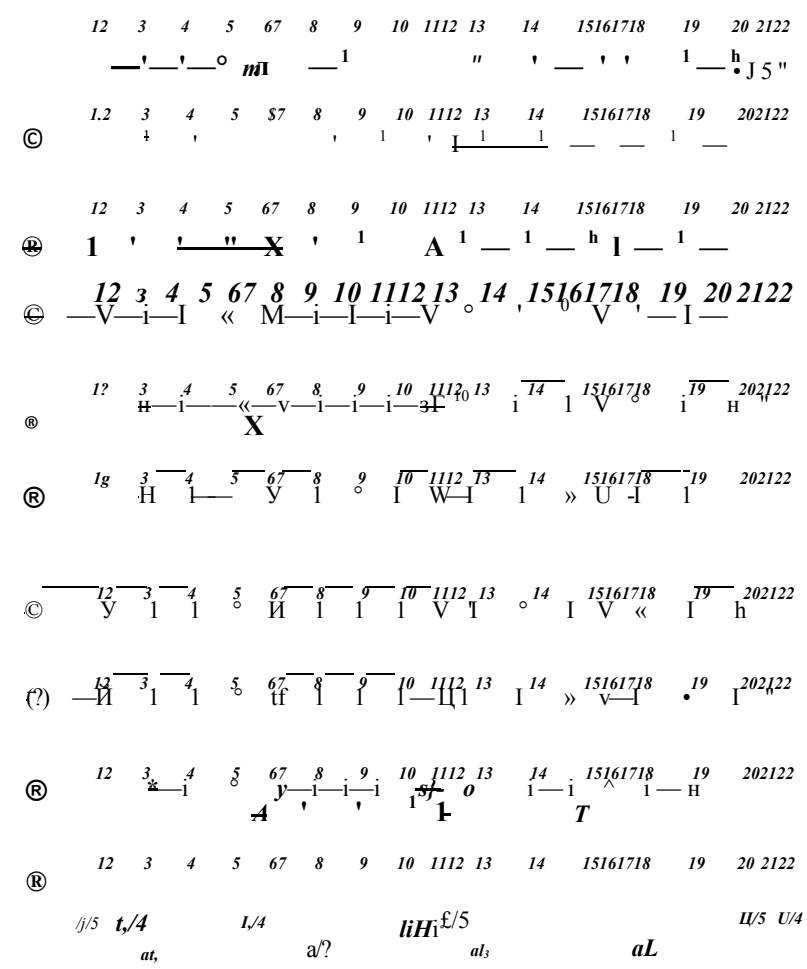


Рис. 11.1

Требуется:

1. Вычертить в масштабе схему шарнирной балки, ее расчетную (поэтажную) схему, указать размеры в метрах, после чего вспомогательную нумерацию сечений с 1 по 22 можно опустить, оставив согласно варианту только нумерацию исследуемых сечений.

2. Проверить геометрическую неизменяемость системы.
3. Построить восемь линий влияния:
   а) линию влияния реакции крайней левой опоры;
   б) линию влияния реакции средней опоры;
   в) три линии влияния изгибающего момента и три линии влияния поперечной силы, возникающих в исследуемых сечениях (см. последний столбец дтабл. 11.1).

Построение линий влияния следует сопровождать краткими пояснениями и необходимыми расчетными схемами.

4. Аналитически вычислить величину реакции крайней левой опоры, поперечной силы и изгибающего момента в исследуемом сечении первой балки, а также построить эпюры ***M*** и ***Q*** для этой балки.

5. С помощью линий влияния, построенных согласно п. 3, проверить реакцию, поперечную силу и изгибающий момент, полученные аналитически по п. 4.

6. По величине Мщах Для первой балки подобрать из условия прочности двутавровое сечение балки по ГОСТ 8239-72, R_v = 200 МПа (сталь).

Таблица 11.1

Номер строки	Схема (рис. 11.1)	/ь м	***h, и***	***h,*** м	'4, М	***а***	***q,*** кН/м	Исследуемые сечения
1	1	16	15	7	14	0,5	14	3-12-21
2	2	18	14	8	13	0,6	14	4-16-17
3	3	20	13	9	12	0,7	13	3-11-16
4	4	22	12	10	11	0,6	13	4-12-22
5	5	15	11	И	10	0,5	12	3-6-17
6	6	18	10	12	9	0,6	12	4-7-16
7	7	16	9	13	8	0,5	11	3-11-17
8	8	20	8	14	7	0,6	11	4-7-12
9	9	20	7	15	6	0,7	10	3-16-22
0	0	15	6	16	5	0,5	10	4-I-2I
	е	а	***г***	***а***	***в***	***б***	***а***	а

Семейство задач № 2
Расчет многопролетных статически определимых балок матричным методом

Для статически определимой многопролетной балки (рис. 11.2) **требуется:**

1. Вычертить в масштабе схему балки и указать размеры пролетов в метрах.
2. Проверить геометрическую неизменяемость системы.

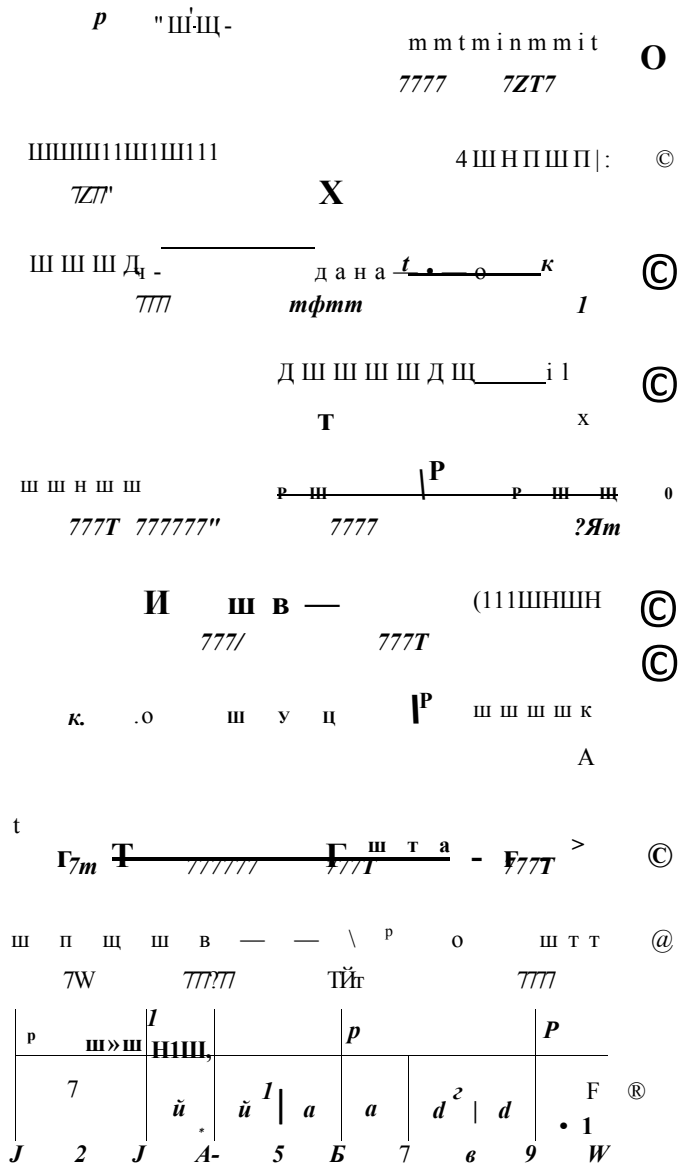


Рис. 11.2

3. Заменить распределенную нагрузку силами, сосредоточенными в узлах деления балки на панели и составить вектор нагрузки.

4. Составить матрицу влияния моментов для всех десяти сечений, отмеченных на схеме (использовать единичные эпюры).

5. Получить матрицу влияния поперечных сил для всех панелей балки.

6. Получить с помощью матриц влияния векторы изгибающих моментов и поперечных сил от нагрузки, преобразованной по п.З.

7. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил ог заданной нагрузки.

8. С помощью матриц влияния построить линию влияния изгибающего момента в сечении ***т.***

9. Загрузить эту линию влияния заданной нагрузкой и сопоставить полученное значение момента с величиной, полученной в п. 6.

Таблица 11.2

Номер строки	Схема (рис. 11.1)	Длина панели d, м	Р, кН	Я, кН/м	Исследуемое сечение, м
1	5	3		7	4
2	4	4		8	2
3	1	3		9	2
4	2	4		10	10
5	3	3		11	2
6	6	4		12	1
7	8	3		13	5
8	9	4		14	3
9	0	3		15	9
0	7	4		16	1
	е	***а***	***в***	***д***	***е***

Семейства задач № 3, 4
Расчет трехшарнирной арки или рамы

Для трехшарнирной арки или рамы (рис. 11.3) **требуется:**

1. Определить аналитически опорные реакции, поперечную и продольную силы, изгибающий момент в сечении ***к*** (с координатой Zk) от заданной нагрузки.

2. Построить линии влияния изгибающего момента поперечной ***QK*** **И** продольной ***N^*** сил в сечении ***к.***

3. Вычислить величины ***MR, QK*** **И** от заданной нагрузки по линиям влияния и сравнить их с полученными в п. 1 задания.

Исходные данные взять из табл. 11.3.

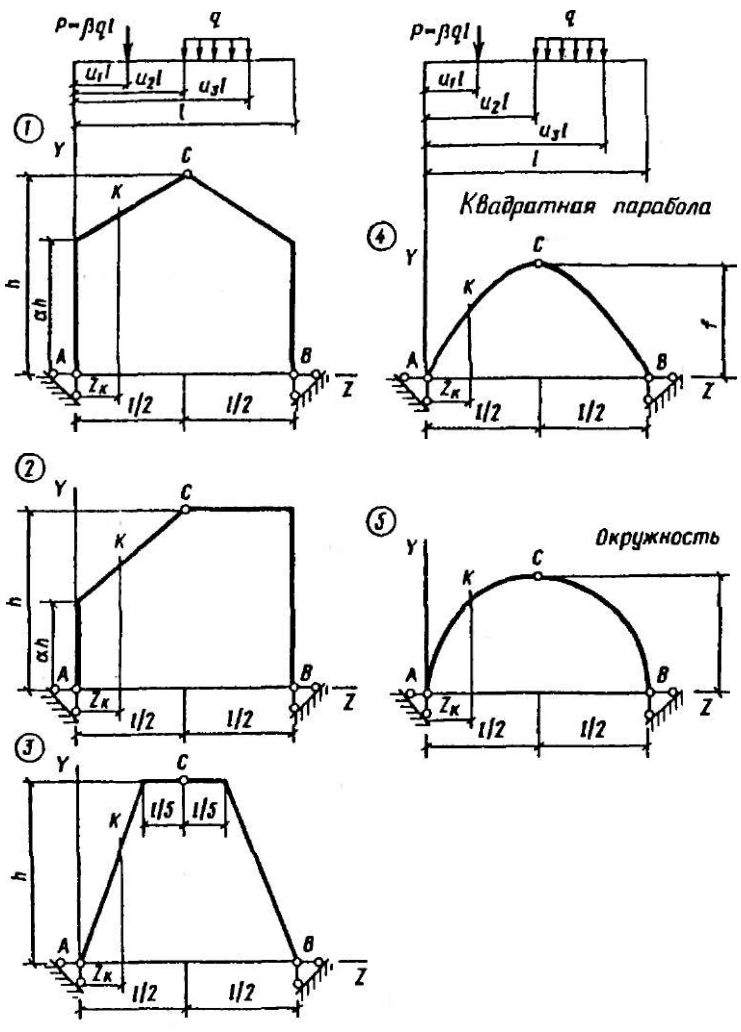


Рис. 11.3

Таблица 11.3

Номер строки	Схема (рис. 11.3)	***l*,** м	/ /	***ч l***	Р	а только для рам	***Ч*,** кН/м	"1	"2	"3
1	5	16	0,3	0,25	1,2	0,80	5	0,25	0,50	1,00
2	4	18	0,3	0,75	1,4	0,75	6	0,50	0	0,75
3	3	20	0,4	0,75	1,6	0,60	7	0,75	0	1,00

Продолжение табл. 11.21

Номер строки	Схема (рис. 11.3)	*I*, *м*	*J* / – /	*lL* *1*	Р	*а* только для рам	*Я* кН/м	*Щ*	"2	"3
4	2	22	0,5	0,25	1,8	0,50	8	0,50	0,25	1,00
5	1	24	0,3	0,75	2,0	0,75	9	0,25	0,25	0,75
6	5	26	0,5	0,75	2,2	0,80	10	0 75	0	0,75
7	4	28	0,4	0,25	2 4	0,60	11	0 50	0,25	0,50
8	3	30	0,3	0,25	2,5	0,50	12	0,25	0,50	0,75
9	2	32	0,5	0,75	2,06	0,80	13	0,75	0	0,25
0	1	36	0,3	0,25	2,0	0,75	14	0,50	0,75	1,00
	е	*б*	*в*	*г*	*е*	*б*	*д*	*а*	*б*	*б*

Примечание. Ординаты точек, синусы и косинусы угла ф наклона касательной к оси *г* следует определять в зависимости от вида схемы заданного сооружения:

- для рамы - из геометрических соотношений;
- для параболической арки (схема 4)

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - z)z, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{4f}{l^2}(l - 2z)$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}, \qquad \sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos\varphi;$$

- при очертании оси арки по окружности радиусом $R = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{8f}$ (схема 5)

$$y = \sqrt{R^2 - z^2} + f - R$$

Семейство задач № 5, а
Расчет ферм на постоянную и временную нагрузки

Для фермы (рис. 11.4) **требуется:**

1. Вычертить расчетную схему полностью (в масштабе).

2. От собственного веса фермы q, равномерно распределенного по всей длине, определить аналитические усилия в пяти элементах фермы, указанных в табл. 11.4.

3. Построить линии влияния усилий в тех же элементах. Для всех линий влияния определить значения характерных ординат.

4. Линию влияния усилия в одном из элементов фермы загрузить постоянной нагрузкой от собственного веса фермы интенсивностью ***q*** и сравнить с результатом, полученным в п. 2.

5. Треугольную линию влияния усилия в стержне одного из поясов фермы загрузить эквивалентной нагрузкой класса ***К*** (табл. 11.5).

Предполагается, что езда осуществляется по прямолинейному поясу фермы.

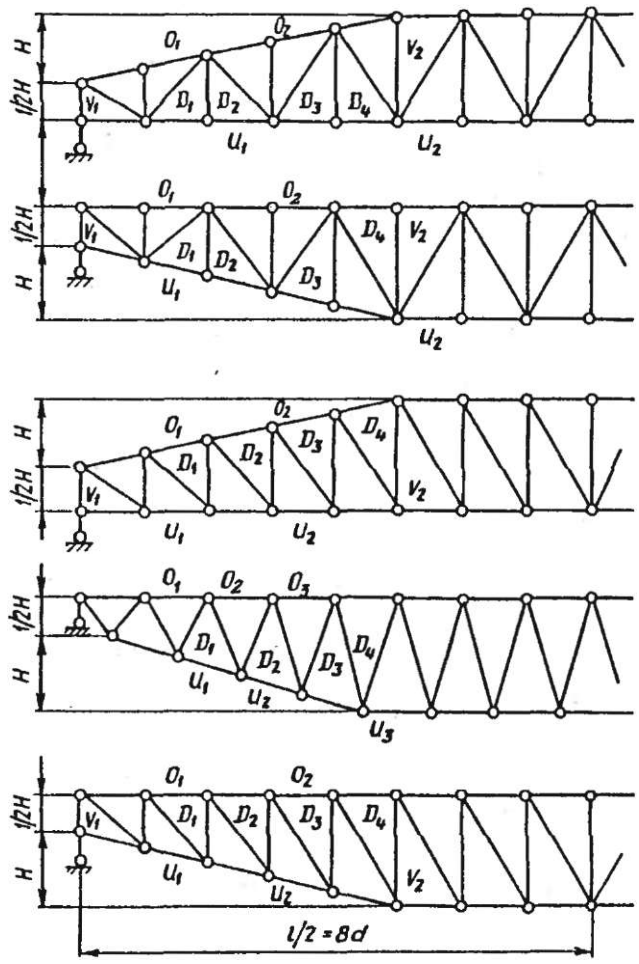


Рис. 11.4

Таблица 11.4

Номер строки	Схема (рис. 11.4)	*Я,* кН/м	*d,* м	*И d*	Элементы					Класс нагрузки, *К*
1	1	4,0	4,8	1,1	***V,***	***O,***	***D,***		***У,***	10
2	2	4,5	5,0	1,2	*Щ*	*О₂*	Д?	D_4	v_2	11
3	3	5,0	5,2	1,3	*и,*	*О,*	*D,*	D_2	*у,*	12

Продолжение табл. 11.21

Номер строки	Схема (рис. 11.4)	***Я,*** кН/м	***d*** м	***И d***	Элементы					Класс нагрузки, ***К***
4	4	5,5	5,4	1,4	***и,***	***о,***		***D?***	***у,***	13
5	5	6,0	5,6	1,5	***Щ***	***о?,***	***D,***	D_4	***У?***	14
6	1	4,0	5,8	1,6	***щ***	***О?***		d_4	***у?***	10
7	2	4,5	6,0	1,7	***и,***	***0,***	*>1	D_7	***у,***	11
8	3	5,0	6,4	1,8	***Щ***	***0?***		D_4	***У?***	12
9	4	5,5	6,6	1,9	***V,***	***0,***	***D,***	D_7,	***у,***	13
0	5	6,0	6,8	2,0	***щ***	***0?***		D_4	***у?***	14
	е	***д***	***г***	***в***	***б***	***а***	***е***	***д***	***г***	***а***

Таблица 11.5

Длина линии влияния, X, м (промежуточные табличные значения $д_{зкя}$ следует брать по двойной интерполяции, т.е. по X и по а)	Эквивалентные нагрузки $q_{зKS}$ пути при классе ***К*****=\,** кН/м	
	$a = \frac{a}{X} = 0$	$a = \frac{-}{X} = 0.5$
1	50.00	50.00
5	20.77	18.10
10	17 81	15.58
20	15.05	13.17
30	13.36	11.69
40	12.25	10.72
50	11.51	10.07
60	11.01	10.01
80	10.46	10.00
100	10 20	10 00
120	10.09	10.00
140	10.04	10.00

Примечание. $O. = \frac{}{"K}$ положение вершины линии влияния, ***а*** — проекция наименьшего расстояния от вершины до конца линии влияния

Семейство задач №5, б
Расчет плоской фермы

Для стальной фермы (рис. 11.5) требуется:

1. От собственного веса фермы ***q,*** равномерно распределенного по всей длине, определить аналитически усилия в четырех элементах фермы, указанных в табл. 11.6.

2. Построить линии влияния усилий в тех же элементах, определив значения их характерных ординат.

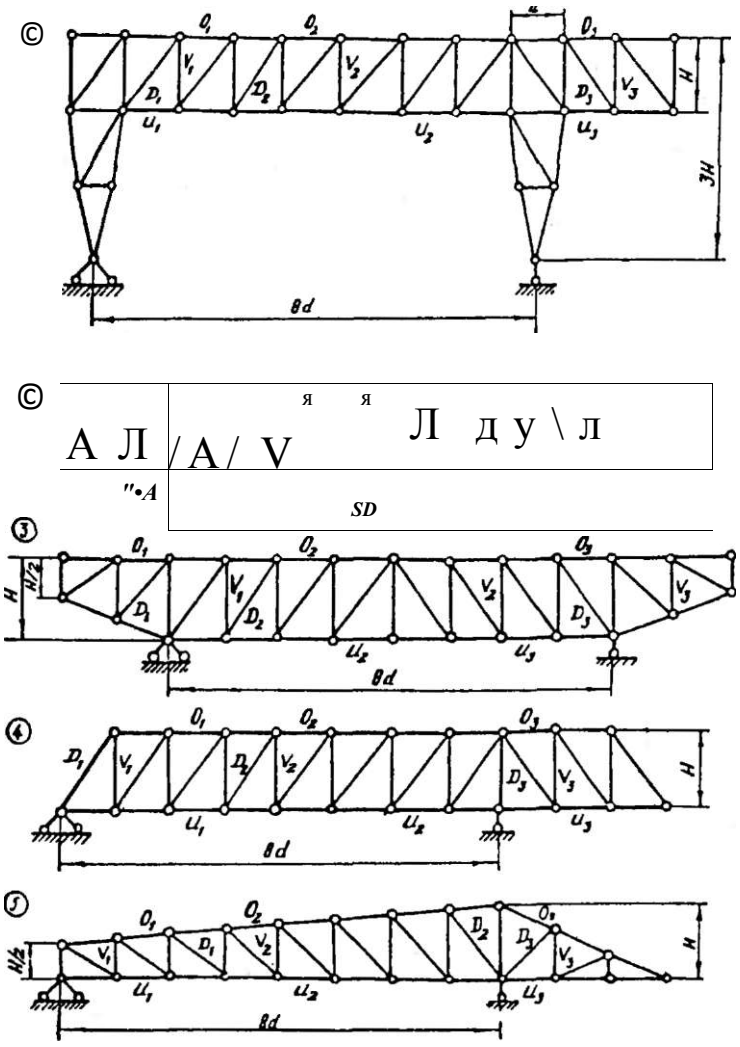


Рис. 11.5

3. Загрузить все линии влияния наиболее опасным образом временной нагрузкой в виде перемешающейся по грузовому поясу тележки с давлением Р на ось (рис. 11.6).

4. Вычислить суммарные (расчетные) усилия в элементах ферм от постоянной и временной нагрузок.

5. Загрузить одну линию влияния (по выбору) постоянной нагрузкой (собственным весом) ***q,*** определить усилие и сравнить его с полученным аналитически в п. 1.



Схема 1 *Схема 2*

Рис. 11.6

Таблица 11.6

Номер строки	Схема (рис. 11.5)	*Я,* кН/м	*d,* м	*н d*	*с l*	Элементы				*Р,* кН	Схема тележки
1	1	11	1,5	1,1	1,0	*о,*	*У3*	D_2	U_2	150	1
2	2	12	1,6	1,2	0,9	θ_2	*У,*	*D,*	*V,*	155	2
3	3	13	1,7	1,3	0,8	θ_3	*У2*	D_2	V_2	160	1
4	4	14	1,8	1,4	0,7	o_2	*У3*	*D,*	*V3*	165	1
5	5	15	1,9	1,5	0,6	θ_3	*У2*	D_2	*V,*	170	2
6	1	16	2,0	1,6	0,5	*О,*	*Уt*	D_3	V_2	175	2
7	2	17	2,1	1,5	0,6	*О3*	$У_2$	D_3	V_3	180	1
8	3	18	2,2	1,4	0,7	*О,*	*У3*	D_2	u_2	185	2
9	4	19	2,3	1,3	0,8	O_2	*Уt*	*D,*	V_3	190	2
0	5	20	2,4	1,2	0,9	Of	*У2*		*U,*	200	1
	е	*д*	*г*	*в*	*б*	*а*	*г*	*е*	*г*	*а*	*е*

Семейство задач № 6
Расчет шпренгельной фермы на постоянную н временную нагрузки

Для шпренгельной фермы (рис. 11.7) **требуется:**

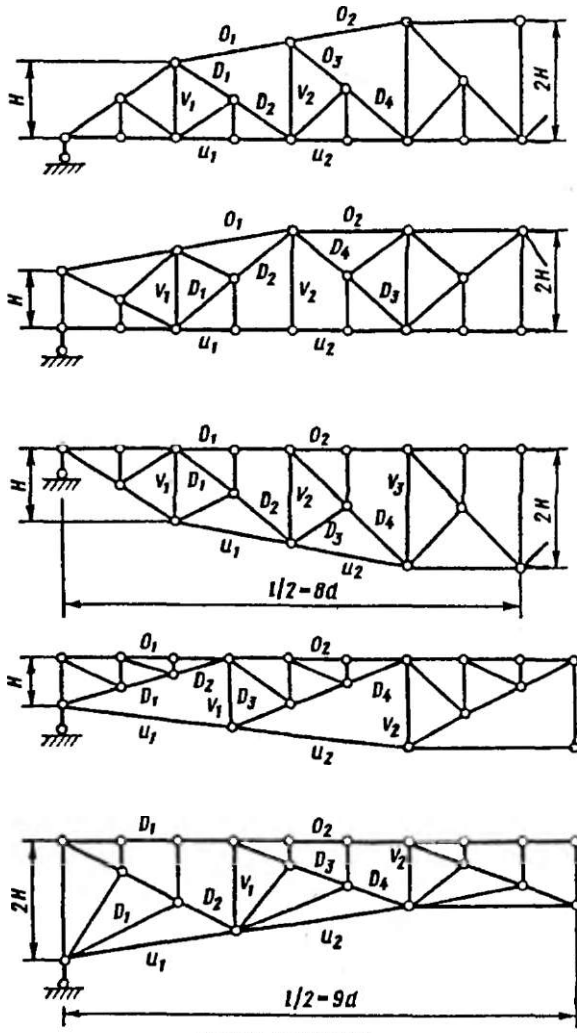
1. От собственного веса фермы *q,* равномерно распределенного по всей длине, определить аналитически усилия в пяти элементах фермы, указанных в табл. 11.7.

2. Построить линии влияния усилий в тех же элементах. Для всех линий влияния определить значения характерных ординат.

3. Линию влияния усилия в одном из элементов фермы загрузить постоянной нагрузкой от собственного веса фермы интенсивностью *q* и сравнить с результатом, полученным в п. 1.

4. Треугольную линию влияния усилия в стержне одного из поясов фермы загрузить эквивалентной нагрузкой класса *К* (рис. 11.7) от железнодорожного состава и вычислить максимальное усилие в этом элементе.

5. Определить то же усилие, что и в п. 4, с помощью загружения линии влияния эквивалентной нагрузкой класса А" (табл. 11.5).



① ② ③ ④

Схема нагрузки

от железнодорожного подвижного состава класса к

*ПО 2,5 К-ID*Н ПО 7.5 К-10*Н*

								КЮ*Н/н пути
	III		II		II			IIIIIIII
	3*2.0	3.0	3*2.0	*.0	3*2.0	3.0	3*20	

Рис. 11.7

6. Сравнить результаты вычислений, полученные в пп. 4 и 5.

Промежуточные табличные значения следует брать по двойной интерполяции, т.е. по Л и а.

Предполагается, что езда осуществляется по прямолинейному поясу фермы.

Таблица 11.7

Номер строки	Схема (рис. 11.4)	*Я,* кН/м	*d,* м	*н d*	Элементы					Класс нагрузки *К*
1	1	4,0	4,8	1,1	*Ui*	*О,*	*D,*	*D?*	*У,*	10
2	2	4,5	5,0	1,2	*Щ*	*О₂*	*Щ*		*У?*	11
3	3	5,0	5,2	1,3	*Ut*	*о,*		*Щ*	*у,*	12
4	4	5,5	5,4	1,4	*Vi*	*о,*	*D,*	*Di*	*У*	*13*
5	5	6,0	5,6	1,5	*щ*	*о₃*	*Щ*	*t>4*	*Уг*	14
6	1	4,0	5,8	1,6	*и₂*	*О₂*	*D₁*	*D₄*	*у?*	10
7	2	4,5	6,0	1,7	*и,*	*Оi*	*D,*	*D?*	*У,*	11
8	3	5,0	6,4	1,8	*щ*	*о?,*	*Щ*		*У?*	12
9	4	5,5	6,6	1,9	*и,*	*о₄*	*Di*	*Щ*	*у,*	*13*
0	5	6,0	6,8	2,0	*Щ*	*О₂*	*Щ*		*Уг*	14
	е	*д*	*г*	*в*	*б*	*а*	*е*	*д*	*г*	*а*

11.2. Расчет статически неопределимых стержневых систем

Семейство задач № 7
Расчет плоской рамы методом сил

Для статически неопределимой рамы (рис. 11.8—9) **требуется:**

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Составить систему канонических уравнений метода сил.
4. Вычислить коэффициенты канонических уравнений.
5. Проверить правильность подсчета коэффициентов канонических уравнений.
6. Решить систему канонических уравнений и проверить правильность ее решения.
7. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов $M_{ок}$.
8. Проверить правильность построения эпюры $M_{ок}$ и построить эпюру Q (г).
9. Построить эпюру N.
10. Провести статическую и деформационную проверку рамы в целом.

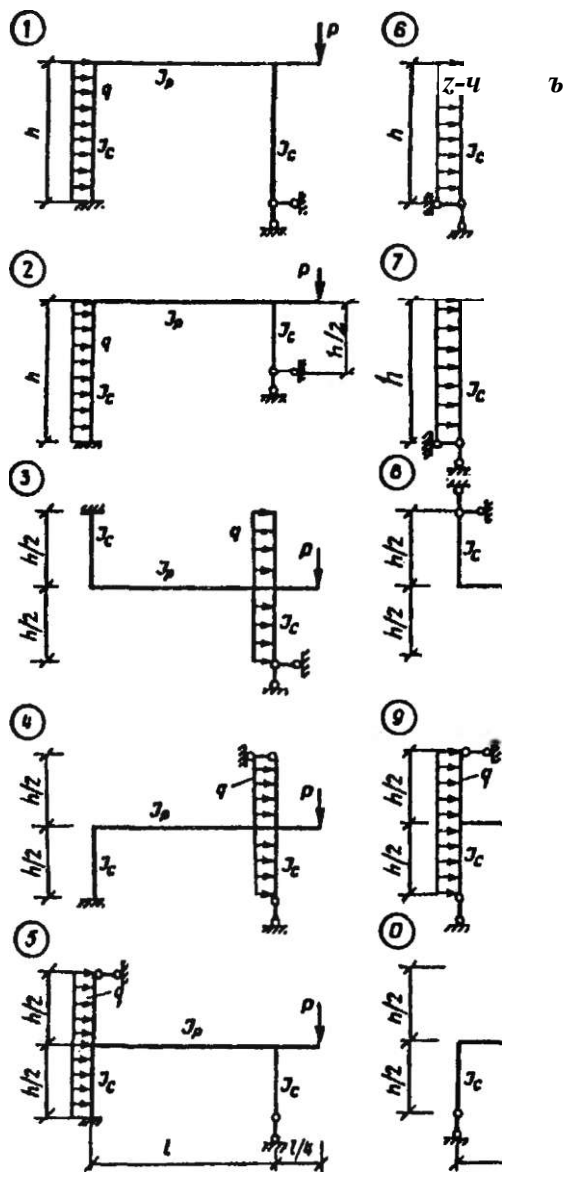


Рис. 11 8

Исходные данные к рис. 11.8 взять из табл. 11.8, а к рис. 11.9 из табл. 11.9.

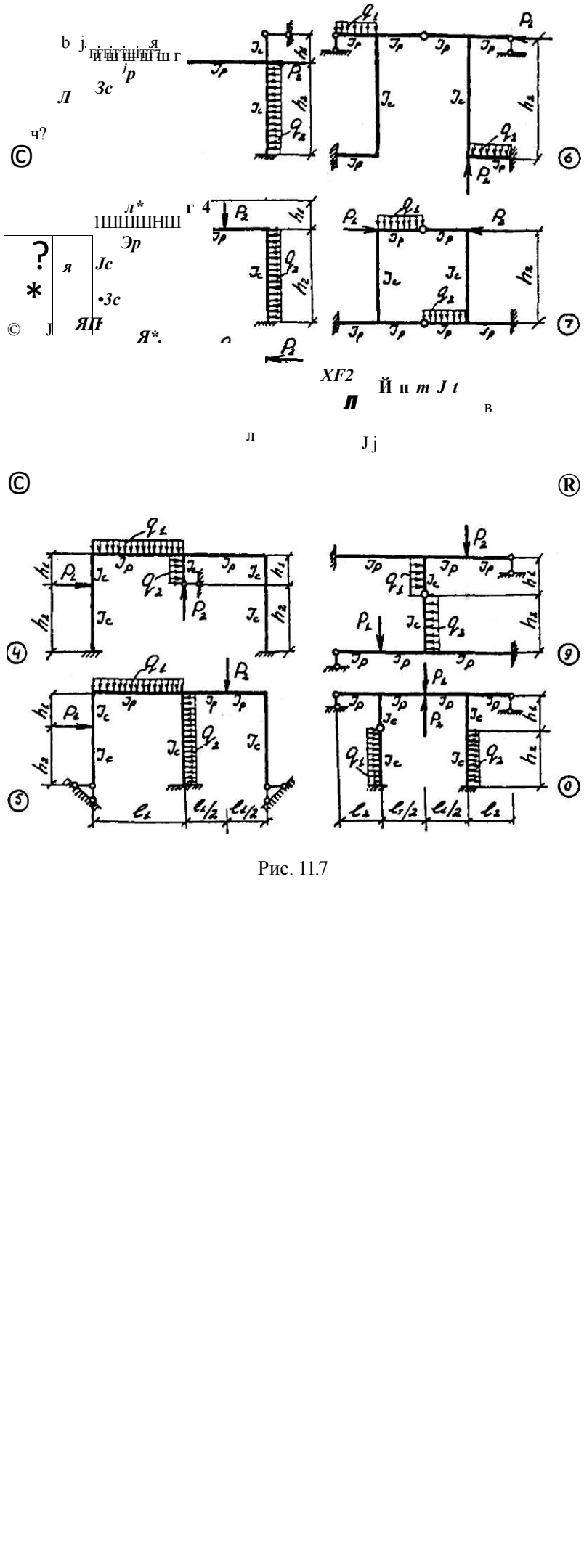


Рис. 11.7

Таблица 11.8

Номер строки	Схема (рис 11.8)	*1,* м	***h,*** м	***P,*** кН	*я,* кН/м	*JV J*
1	1	5,0	3,0	30	8	2,00
2	2	4,5	3,2	35	10	1,80
3	3	4,2	3,4	40	12	1,60
4	4	4,0	3,5	45 '	14	1,50
5	5	3,8	3,6	50	15	1,25
6	6	3,6	3,8	55	16	1,20
7	7	3,5	4,0	60	18	1,00
8	8	3,4	4,2	65	20	0,80
9	9	3,2	4,5	70	22	0,75
0	0	3,0	5,0	75	24	0,50
	е	***а***	***б***	***е***	***а***	***д***

Таблица 11.9

Но-мер стро-ки	Схе-ма (рис. 11.9)	***b*** м	***h,*** м	***hi,*** м	Л* м	***Pi,*** кН	***Pъ*** кН	***41,*** кН/м	***92,*** кН/м	*J Р h*
1	1	2,0	4,0	3,0	8,0	3,0	-	0,1	-	2,00
2	2	3,0	6,0	4,0	2,0	-	5,0	-	0,4	1,80
3	3	4,0	8,0	5,0	6,0	4,0	-	0,2	-	1,60
4	4	5,0	9,0	6,0	7,0	-	4,0		0,3	1,50
5	5	6,0	7,0	5,0	9,0	5,0		0,3	-	1,25
6	6	7,0	4,0	4,0	10,0	-	3,0	-	0,5	1,20
7	7	8,0	5,0	3,0	4,0	6,0	-	0,4		1,00
8	8	9,0	8,0	2,0	5,0	-	2,0		0,8	0,80
9	9	10,0	6,0	6,0	9,0	7,0		0,6	-	0,75
0	0	4,0	2,0	4,0	10,0	-	8,0	-	0,7	0,50
	е	***а***	***в***	*г*	***б***	***е***	***е***	***а***	***а***	***д***

Семейство задач № 8
Расчет плоской рамы методом перемещений

Для статически неопределимой рамы (рис. 11.10) **требуется:**

1. Определить число кинематической неопределимости заданной системы и выбрать основную систему метода перемещений.
2. Построить необходимые единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов в основной системе.
3. Записать систему канонических уравнений метода перемещений и вычислить ее коэффициенты из условия равновесия частей рамы.
4. Решить полученную систему канонических уравнений.

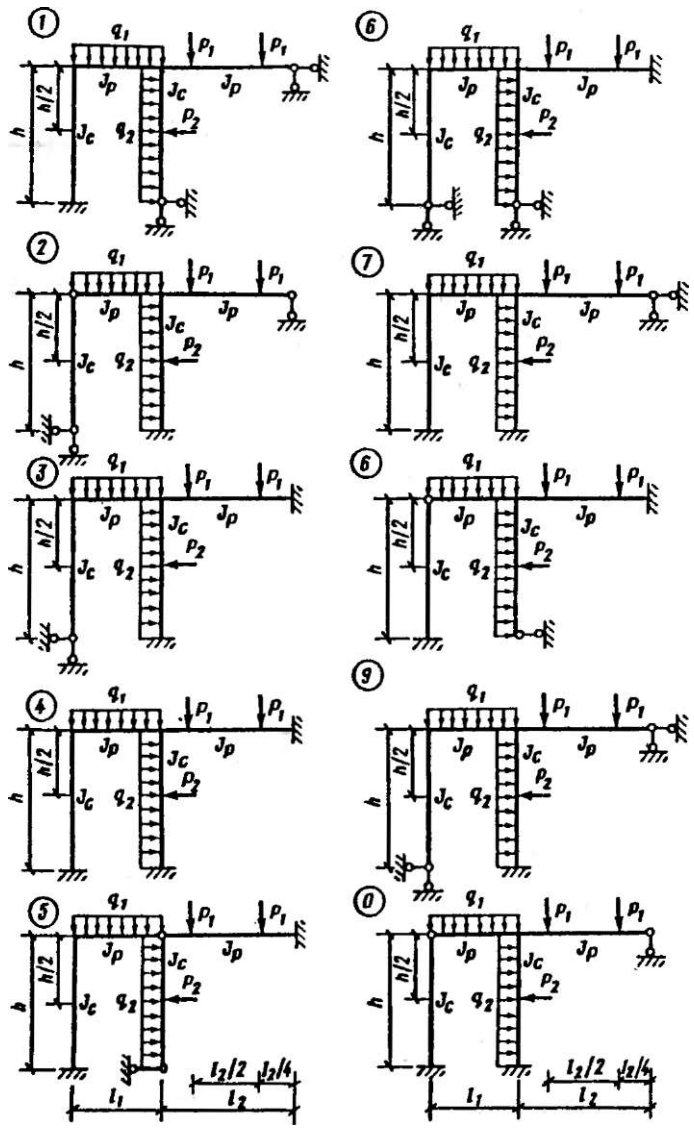


Рис. 11.10

5. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$, поперечных Q и продольных сил N.

6. Проверить полученные результаты, осуществив деформационную и статическую проверки.

Исходные данные взять из табл. 11.10.

Таблица 11.10

Номер строки	Схема (рис 11.10)	*h*, м	*1„* м	*Pi*, кН	*41*, кН/м	*h* / *h*	*Pг* / *Pi*	*02* / *Я1*	*J_v* / *Jc*
1	1	5,0	3,0	15	2	1,00	0,6	0,85	1,20
2	2	4,8	3,2	20	2	1,10	0,8	0,80	1,25
3	3	4,4	3,4	25	2	1,15	1,0	0,75	1,30
4	4	4,2	3,6	30	4	1,20	0,6	1,70	1,40
5	5	4,0	3,8	35	4	1,25	0,8	0,85	1,50
6	6	3,8	4,0	40	4	1,30	1,0	1,80	1,60
7	7	3,6	4,2	45	2	1,35	0,6	0,75	1,70
8	8	3,4	4,4	50	2	1,40	0,8	0,70	1,75
9	9	3,2	4,8	55	2	1,45	1,0	0,85	1,80
0	0	3,0	5,0	60	2	1,50	0,8	0,80	2,00
	е	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*	*а*	*б*	*в*

Семейство задач № 9
Расчет неразрезной балки

Для балки (рис. 11.11) **требуется:**

1. Построить эпюру изгибающих моментов от заданной постоянной нагрузки с помощью уравнений трех моментов.

2. Построить линии влияния опорных изгибающих моментов Mj_j, Mj, а также линии влияния изгибающего момента в сечении на середине пролета (/ - 1) + / (условно обозначая через

3. С помощью линий влияния п. 2 определить величины изгибающих моментов ***MJ***_j, ***MJ*** и Л/о,5/,^{от} заданной постоянной нагрузки и сравнить с результатами, полученными в п. 1.

4. От заданной постоянной и временной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью ***q*** — 10 кН/м построить объемлющую эпюру изгибающих моментов для пролета (использовать линии влияния, построенные в п. 2 и результаты вычислений п. 1).

Исходные данные взять из табл. 11.11.

Таблица 11.11

Номер строки	Схема (рис. 11.11)	*h.* м	*h,* м	*h,* м	*P,* кН	*P„* кН	*Pь* кН	*Pз,* кН	кН/м	*9i,* кН/м	*9ь* кН/м	*i*
1	1	3,0	3,2	3,0	4,0	0	28,0	0	18,0	0	18,0	1
2	2	3,6	3,5	3,5	5,0	24,0	0	24,0	0	14,0	0	2

Продолжение табл. 1111

Номер строки	Схема (рис. 11.11)	*h*, м	'2, М	*h*, *м*	Л кН	*P*,, кН	*Pъ* кН	*Pз*, кН	*9i*, кН/м	*Чь* кН/м	*4l*, кН/м	i
3	3	4,2	4,0	3,8	6,0	0	24,0	0	12,0	0	12,0	3
4	4	4,5	4,5	4,2	8,0	20,0	0	20,0	0	8,0	0	1
5	5	4,8	5,0	4,8	6,0	0	20,0	0	7,5	0	7,5	2
6	1	5,4	5,6	5,1	4,0	16,0	0	16,0	0	7,5	0	3
7	2	6,0	6,0	5,5	5,0	0	16,0	0	4,8	0	6,4	1
8	3	6,6	6,5	6,0	6,0	12,0	0	12,0	0	4,8	0	2
9	4	7,2	7,5	6,4	8,0	0	12,0	0	4,0	0	4,5	3
0	5	7,5	8,0	7,2	4,0	8,0	0	8,0	0	3,6	0	2
	е	а	*б*	*в*	*г*	*а*	*б*	*в*	*а*	*б*	*в*	*д*

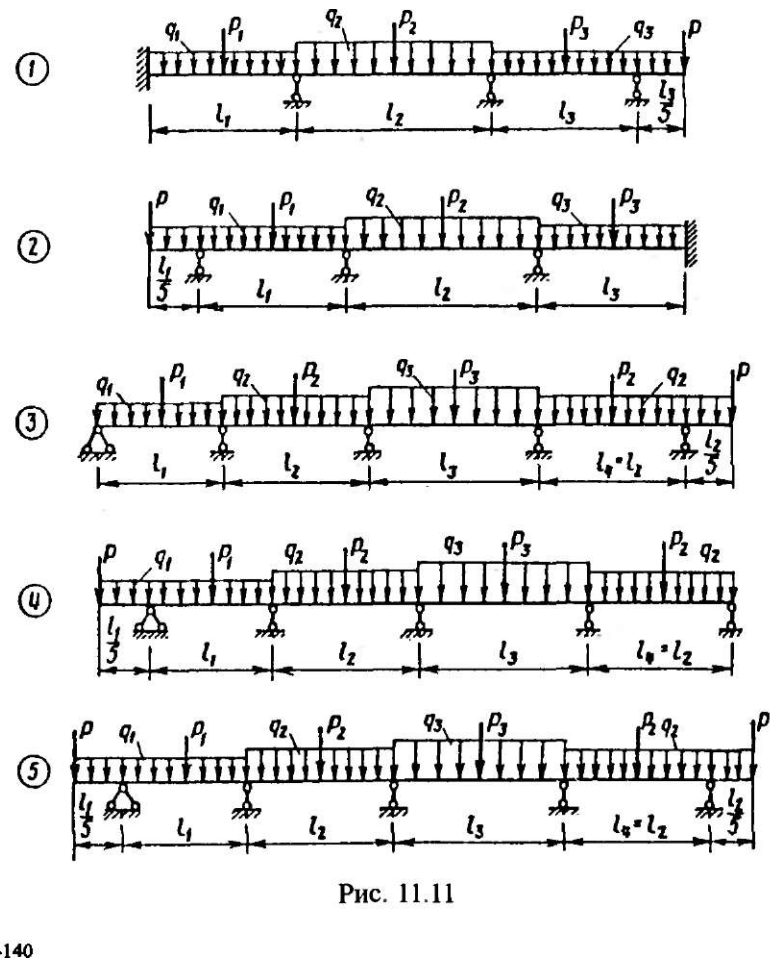


Рис. 11.11

11.3. Балка на упругом основании

Семейство задач № 10
Расчет бесконечно длинной балки на упругом основании

Железобетонная балка (рис. **11.12)** прямоугольного сечения имеет настолько большую длину, что в расчете можно принять ее за бесконечную. Балка лежит на основании, упругие свойства которого могут быть охарактеризованы коэффициентом податливости *KJ.* Модуль упругости материала балки $E = 2{,}0 \cdot 10^4$ МПа.



Рис. **11.12**

На балку действуют два груза Р] и Р2, отстоящие друг от друга на расстоянии $l = 4\,a \triangle Ш^{м}$.

Требуется построить для балки эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, а также эпюры осадки основания.

Исходные данные взять из табл. **11.12.**

Таблица 11.12

Номер строки	**ь,** м	А, м	*ь кН	Рь кН	**к,,** 10^4 кН/м^3
1	0,40	0,50	600	600	0,5
2	0,50	0,55	700	750	1,0
3	0,60	0,60	800	1000	1,5
4	0,70	0,65	900	1250	2,0
5	0,75	0,70	1100	1500	2,5
6	0,80	0,75	1200	1750	3,0
7	0,90	0,80	1300	2000	3,5
8	1,00	0,85	1400	2250	4,0
9	1,10	0,90	1600	2500	4,5
0	1,20	1,00	1700	3000	5,0
	а	*б*	*в*	*в*	*д*

Семейство задач № 11
Расчет короткой балки на упругом основании

Определить прогибы и усилия, возникающие в поперечных сечениях *(b* х Л) короткой балки длиной 2 /, лежащей на упругом основании (рис. **11.13).**

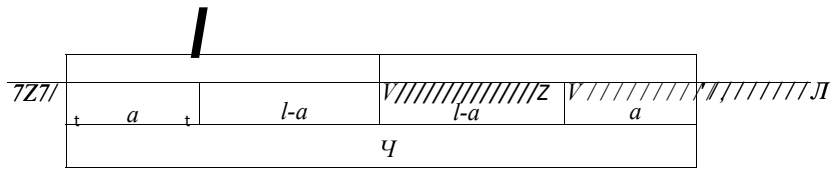


Рис. 11.13

Исходные данные взять из табл. 11.13.

Таблица 11.13

Номер строки	***b,*** м	***h,*** м	***P,*** кН	***U*** м	***a,*** м	***E,*** 10^8кН/м^2	***Kj,*** МПа/м
1	0,20	0,30	20	1,50	0,50	3,0	100
2	0,25	0,40	25	1,00	0,40	4,0	90
3	0,30	0,50	30	1,25	0,30	5,0	80
4	0,30	0,60	40	1,00	0,20	6,0	70
5	0,25	0,50	35	1,50	0,30	7,0	60
6	0,20	0,40	30	1,30	0,20	8,0	120
7	0,30	0,30	20	1,20	0,40	9,0	130
8	0,35	0,40	25	1,10	0,50	10,0	110
9	0,20	0,50	10	1,00	0,30	3,0	100
0	0,25	0,40	15	1,20	0,40	5,00	90
	а	*б*	***в***	*б*	*б*	*г*	*д*

11.4. Устойчивость сооружений

Семейство задач № 12
Расчет рамы иа устойчивость методом перемещений

Для рамы, представленной на рис. 11.14, **требуется:**

1. Показать возможные формы потери устойчивости, рассматриваемой рамы.

2. Определить критические значения силы для случаев нагружения заданной системы, когда: *PJ = P; P2 = 0; PJ* = 0; $P_2 = P$; *P] = P; P2* = *P-*

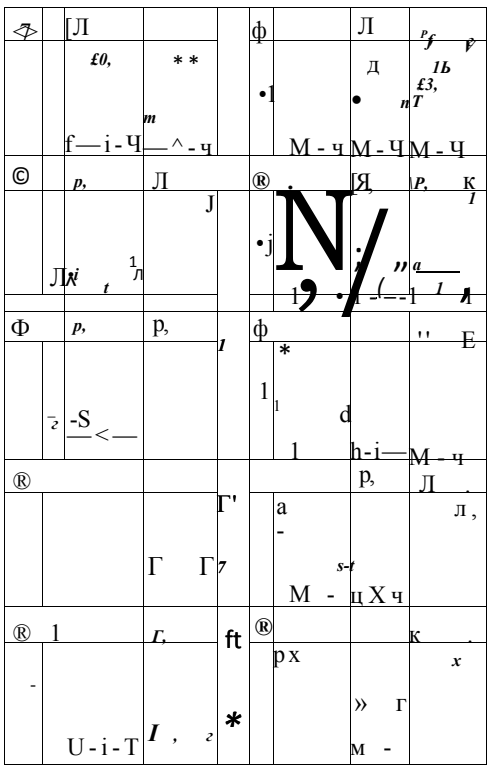


Рис. 11.14

Исходные данные взять из табл. 11.14.

Таблица 11.14

Номер строки	Номер схемы (рис. 11.14)	h, м	EJ_p / EJ_C	EJ_C, кНм^2
1	1	4,0	1	2000
2	2	6,0	2	3000
3	3	8,0	3	4000
4	4	4,0	4	5000
5	5	6,0	1	6000
6	6	8,0	2	2000
7	7	4,0	3	3000
8	8	6,0	4	4000
9	9	8,0	1	5000
0	0	4,0	2	6000
	е	а	б	в

11.5. Динамика сооружений

Семейство задач № 13
Динамический расчет стержневой системы с одной степенью свободы

Проверить прочность конструкций (рис. 11.15) при одновременном действии статической вертикальной силы $G = mg$ в точке закрепления сосредоточенной массы и динамической силы $P\{t\} = P_a \sin 6/$. Расчетное сопротивление материалов конструкций принимать равным R = 150 МПа.

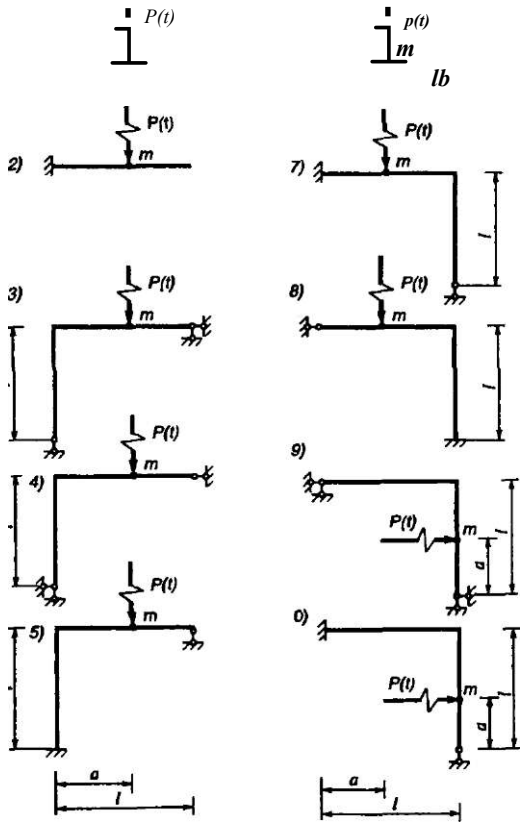


Рис. 11.15

Исходные данные взять из табл. 11.15.

Таблица 11.15

Номер строки	Номер схемы	EJ, кНм^2	l	a	m, кНс^2/м	$P_{,,}$	е, с$^{-1}$	$к$, 10~^{4}м^3
1	0	4000	3.0	0.5	1.0	1.0	10	2
2	1	3000	2.0	1.5	1.5	2.0	20	3
3	2	2000	4.0	1.0	2.0	1.5	30	2
4	3	5000	2.0	0.5	0.5	2.5	40	1.5
5	4	6000	2.0	0.5	1.5	3.0	30	3
6	5	4000	3.0	1.0	1.0	3.5	20	2.5
7	6	5000	4.0	1.0	2.0	4.0	10	2
8	7	3000	3.0	1.5	2.5	3.0	50	4
9	8	2000	5.0	1.5	1.5	2.0	40	3
0	9	3000	4.0	1.0	1.0	1.0	30	2
	а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*а*	*б*

Семейство задач № 14
Динамический расчет стержневой системы с двумя степенями свободы

В заданной системе с размерами, указанными на рис. 11.16, в точках 1 и 2 установлены для одинаковых вибратора общим весом G каждый и весом неуравновешенных частей P_0 • размещенных на оси вращения с эксцентриситетом е. Вибраторы вращаются синфазно с частотой п об/мин.

Система выполнена из двух двутавров (ГОСТ 8339-72). Пренебрегая собственным весом системы и внутренним трением материала, требуется:

1. Сопоставить канонические уравнения по методу сил, определяющие свободные колебания рамы, и получить значения частот и периодов собственных колебаний заданной стержневой системы.

2. Вычислить собственные векторы и графически представить возможные формы собственных колебаний системы, отвечающие найденным значениям собственных частот.

3. Проверить ортогональность полученных форм колебаний.

4. Составить канонические уравнения по методу сил, определяющие вынужденные колебания заданной системы, и получить значение амплитуд инерционных сил.

5. Построить статическую эпюру изгибающих моментов от веса вибраторов и эпюру амплитудных значений изгибающих моментов при вынужденных колебаниях системы.

6. Вычислить значения динамических коэффициентов для характерных сечений систем и определить наиболее опасное.

7. Вычислить напряжения в опасном сечении системы, и проверить прочность конструкций, принимая $\boldsymbol{R}$ = 160 МПа.

Исходные данные взять из табл. 11.16.

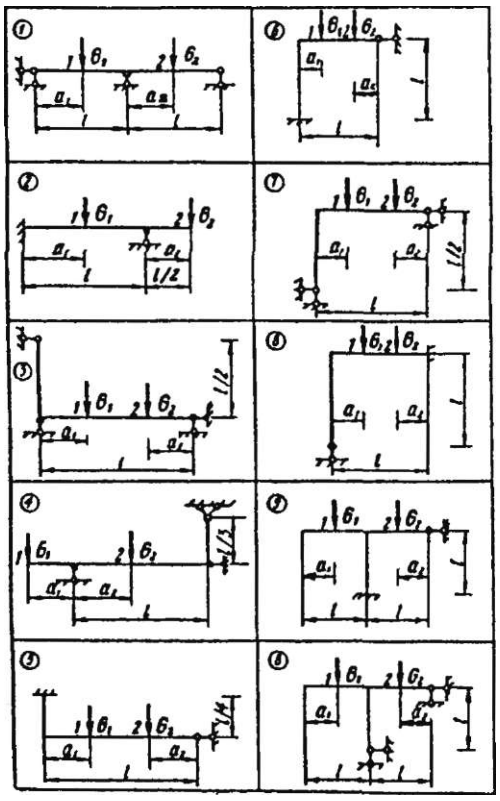


Рис. 11.16

Таблица 11.16

Номер строки	Номер схемы	*l*, м	*G*, кН	*Pn*. кН	*n*, об/мин	Номер профиля	*e*, м	a_i, м	*c*, м
1	0	8.0	18.0	1.2	600	45	0.010	*l*/2	*l*/2
2	1	6.0	20.0	1.4	800	50	0.012	*l*/4	*l*/2
3	2	12.0	16.0	1.0	1000	60	0.014	*l*/2	*l*/4
4	3	12.0	16.0	1.0	1200	60	0.010	*l*/4	*l*/4
5	4	10.0	28.0	1.1	1400	55	0.010	*l*/2	*l*
6	5	8.0	16.0	1.2	1600	50	0.015	*l*/4	*l*/4
7	6	6.0	24.0	1.6	1800	60	0.012	*l*/4	*l*/2
8	7	6.0	16.0	1.4	2000	50	0.014	*l*/4	*l*/4
9	8	8.0	20.0	1.2	1800	60	0.012	*l*/4	*l*/4
0	9	8.0	22.0	1.2	1600	45	0.014	*l*/2	*l*/2
		а	*а*	*е*	*б*	*в*	*г*	*д*	*а*	*а*

Семейство задач № 15
Расчет сооружений на сейсмические нагрузки

По спектральному методу определить величину сейсмических сил и построить эпюры поперечных сил и изгибающих элементов, возникающих в поперечных сечениях заданных систем с конечным числом степеней свободы, расположенных на поверхности линейно деформированного основания (рис. 11.17).

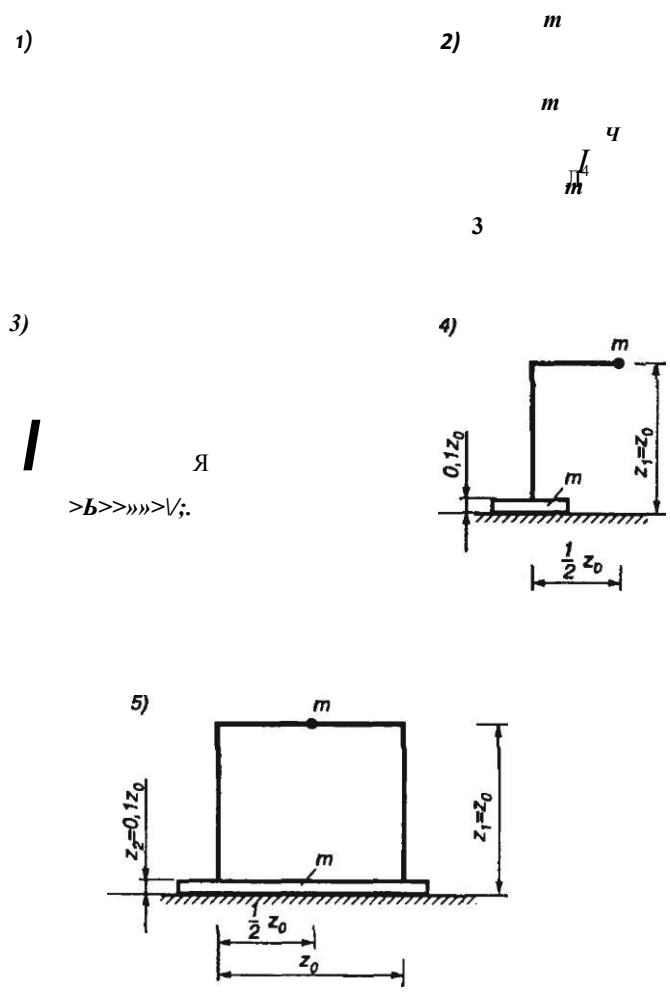


Рис. 11.17

Исходные данные взять из табл. 11.17.

Таблица 1117

Номер строки	Номер схемы	W U g	z_0, м	$LJ—L_2$, м	$E_{\text{с}}$, 10^4кНм^2	^{Pгр}, кНс^2 м4	Мг	EJ, 10^9кН м^2	GF, 10^8кН м^2
1	5	0.1	3.0	20	10	1.7	0.3	30	1.0
2	4	0.2	3.5	25	9	1.8	0.35	25	0.5
3	3	0.4	25	30	8	1.85	04	20	1.5
4	1	0.4	20	15	7	19	0.35	25	2.0
5	2	0.2	30	20	6	20	0.3	30	1 5
6	1	0.1	3.5	25	5	*1.9*	0.35	35	1.0
7	2	0.2	4.0	30	6	1.8	0.4	25	0.5
8	3	0.2	2.5	25	7	1.7	0.45	20	1.0
9	4	0.4	3.0	20	8	1.75	0.4	30	1.5
0	5	0.2	3.5	15	9	1.8	0.35	25	2.0
	б	*а*	*в*	*г*	*д*	*е*	*а*	*б*	*в*

Семейство задач № 16
Определение собственных частот системы

Определить основные собственные частоты заданной системы (рис. 11.18).

1)

У'Л

2,

3)

ь . з .

*** х**

5)

I

Рис. 11.18

Исходные данные взять из табл. 11.18.

Таблица 11.15

Номер строки	Р, кНс^2/м^4	*F*, 10-^{2}м^2	*l*, м	*EJ*, 10^4кНм^2
1	1.8	4	2.0	1.0
2	2.0	2	3.0	2.0
3	2.5	6	4.0	4.0
4	3.0	8	4.0	8.0
5	4.0	10	5.0	16.0
6	5.0	12	6.0	12.0
7	3.0	14	5.0	10.0
8	4.0	10	4.0	5.0
9	6.0	8	3.0	4.0
0	5.0	6	2.0	3.0
	а	*в*	*г*	*д*

11.6. Изгиб и кручение тонкостенных стержней

Семейство задач № 17
Расчет тоикостеииого стержня

Тонкостенный стержень открытого профиля (рис. 11.19) одним концом жестко закреплен, а на свободном конце нагружен сосредоточенной силой ***P***\ или ***Pi-*** Толщина стенки и полок 8 = 0,01 м. Модуль упругости материала стержня Е = 210^{й} Па; модуль сдвига G = 8-Ю^{10} Па.

Для заданного стержня **требуется:**

1. Определить площадь, положение центра тяжести и главные центральные моменты инерции поперечного сечения стержня.

2. Найти положение центра изгиба и положение главной нулевой секториальной точки.

3. Определить момент инерции при чистом кручении «/^р секториальный момент инерции /$_{ш}$.

4. Вычислить изгибно-крутильную характеристику поперечного сечения стержня:

$$a = \frac{GJ_K p}{EJ_{,,}}$$

5. Написать дифференциальное уравнение углов закручивания для заданного стержня и привести его решение.

6. Построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, моментов чистого кручения, изгибно-крутящих моментов и бимоментов, указав их ординаты.

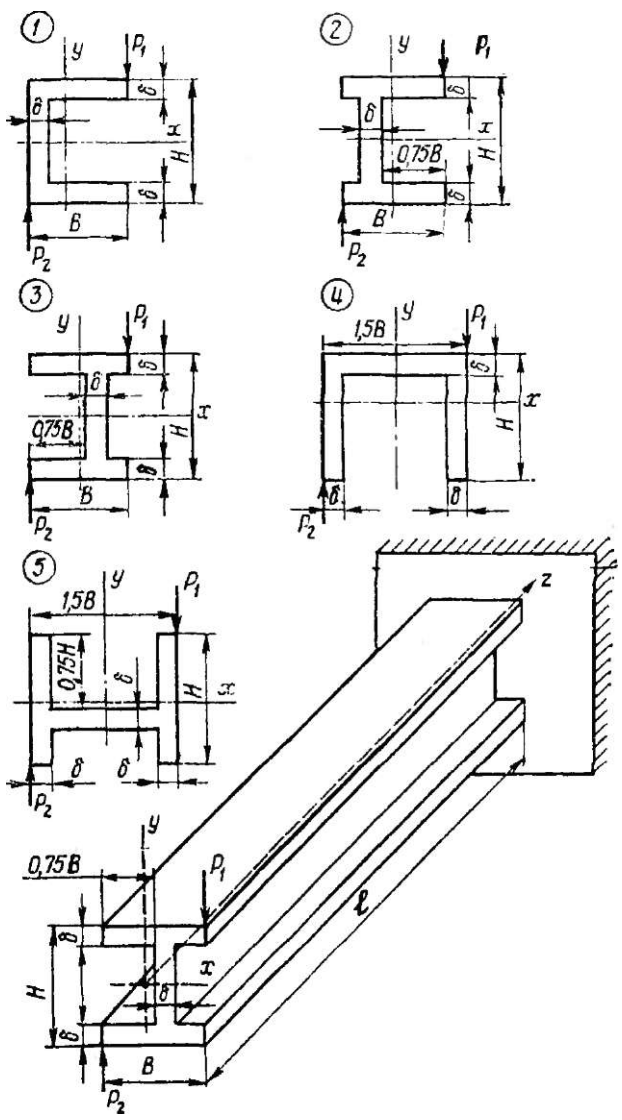


Рис. 11.19

7. Построить эпюры нормальных напряжений $a_{из}$, c_a и $J = c_{из} + o_т$, предварительно определив их ординаты.

Исходные данные взять из табл. 11.19.

Таблица 11.19

Номер строки	Номер схемы	*н*, 10^{n2} М	*в*, 10-2 М	*1*, м	*Ри* кН	*Рг*, кН
1	1	12	10	1.0	2.0	0
2	2	14	12	1.2	0	1.0
3	3	15	12	1.3	2.5	1.5
4	4	15	14	1.4	1.5	0
5	5	16	14	1.5	2.0	1.0
6	1	17	16	1.6	0	2.0
7	2	18	1	1.7	2.0	1.5
8	3	20	18	1.8	2.0	1.0
9	4	22	18	1.9	2.5	2.0
0	5	14	12	2.0	1.5	1.0
	е	*а*	*а*	*б*	*в*	*в*

11.7. Пластинки и оболочки

Семейства задач № 18, 19
Примеры расчетов круглых плит

Принимая модуль упругости материалов равным $E = 210^8$ кН/м^2, коэффициент Пуассона р = 0,3 для плит по заданной схеме (табл. 11.21), с радиусом ***R = а,*** толщиной ***h,*** **требуется:**

1. Определить эпюру прогибов.
2. Построить эпюру моментов.
3. Проверить прочность конструкций по методу допускаемых напряжений, принимая $сг_т = 2\text{-}10^5$ кН/м^2.

Исходные данные взять из табл. 11.20.

Таблица 11.20

Номер строки	Номер схемы	*R*, М	А, М	*Р*, кН	*а/Я*
1	16	4.0	0.15	100	0.25
2	15	3.5	0.20	90	0.3
3	14	3.0	0.10	80	0.4
4	13	2.0	0.20	70	0.5
5	17	2.5	0.15	60	0.45
6	18	3.0	0.10	50	0.4
7	17	3.5	0.05	60	0.35
8	16	4.0	0.08	70	0.3

Продолжение табл. 11.21

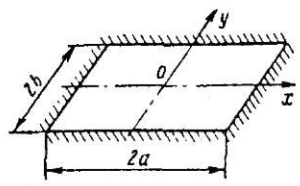
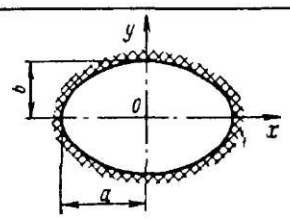
Номер строки	Номер схемы	*R*, м	*И*, м	*Р*, кН	*a/R*
9 0	15 14	4.5 5.0	0.1 0.15	80 90	0.25 0.2
	а	*б*	*в*	г	*д*

Семейства **задач № 20**

Примеры расчетов прямоугольных плит

Для прямоугольной плиты толщиной Л, размерами в плане (см. табл. 11.21), 1\ х/$_2$, модуля упругости материалов Е = 8 • 10^7кН/м^2, коэффициента Пуассона р. = 0,35 при действии распределенной *нагрузки q* (табл. 11.21) построить эпюры моментов и поперечных сил.

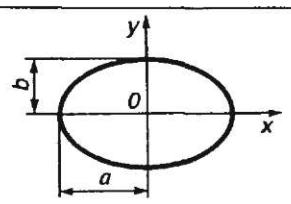
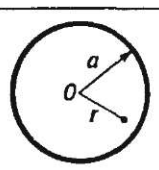
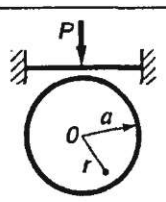
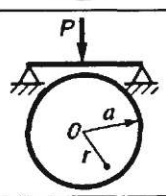
Таблица 11.21

	План пластинки и закрепление ее краев	Нагрузка и выражение для прогиба
0	 Защемление по контуру	$q = q_0 = \text{const};$ $w = C(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2;$ $l_1 = 2a;\ l_2 = 2b$
1	См. вариант 0, схема та же	$q = q_0 \cos\frac{\pi x}{2\alpha}\cos\frac{\pi y}{2b};$ $w = C(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2$
2	 Защемление по контуру, эллиптическая пластина	$q = q_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right);$ $w = C\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2$

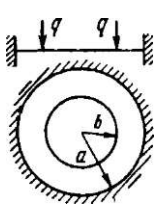
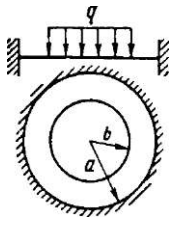
Продолжение табл. 11.21

	План пластинки и закрепление ее краев	Нагрузка и выражение для прогиба
3	См. вариант 2, схема та же	**I V** *f)* - c f . **2 '' У V. a b)
4	*i f - * - -* *2a* Шарнирное опирание по контуру	$q = q_0 = \text{const};$ $w = C \cos\frac{7CC}{2a}\cos\frac{яy}{2b};$ */, = 2a; l₂ = 2b*
5	См. вариант 4, схема та же	$W = C\cos\frac{7tX}{2a}\cos\frac{7ty}{2b}$
6	7 7 / *a* t *X*	$q = q_0 = \text{const};$ *w = Cxy(x - a)(y - b)-,* = a, *h* = b
7	/a // / 7 / — / 20 C	$q = q_0 = \text{const};$ w = C(*2 - _ &); */, = 2я; l₂ = 2b*
8	См. вариант 6, схема та же	$q — q_0 = \text{const};$ $w = C(x - a)^2(y - b)^2$
9	См. вариант 7, схема та же	$q=q_0 \cos\frac{7CC}{2a}\cos\frac{Лy}{2fc};$ $w = C\cos\frac{7ZX}{2a}\cos\frac{Щ>}{2b}$
10	См. вариант 6, схема та же	$q = \%\sin\frac{7ГX}{a}\sin\frac{7ty}{b};$ $w = C\sin\frac{JtX}{a}\sin\frac{7ty}{b}$

Продолжение табл. 11.21

	План пластинки и закрепление ее краев	Нагрузка и выражение для прогиба
11	 Эллиптическая пластина	$q = \text{const};$ $w = C\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2$
12	См. вариант 11, схема та же	По контуру приложены моменты $M_x = m$. Для круглой пластинки по контуру приложены моменты $M_r = m$. Выражение прогиба: $w = C\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$. Рассмотреть частный случай $a = b = r$
13		$q = \frac{P}{\pi a^2} = q_0 = \text{const};$ $w = C\left(a^2 - r^2\right)^2$
14	См. вариант 13, схема та же	$q = \frac{P}{\pi a^2} = q_0 = \text{const};$ $w = C\left(a^2 - r^2\right)\left(\frac{5+\mu}{1+\mu}a^2 - r^2\right)$
15*		Нагрузка P; $w = PC\left(r^2 \ln\frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{2}\right)$
16*		Нагрузка P; $w = PC\left[\frac{3+\mu}{1+\mu}\left(a^2 - r^2\right) + 2r^2 \ln\frac{r}{a}\right]$

Продолжение табл. 11.21

	План пластинки и закрепление ее краев	Нагрузка и выражение для прогиба
17*		Равномерно распределенная по окружности радиуса b нагрузка интенсивностью $q = \frac{P}{\pi b}$. При r < b $w = C[(a^2 - b^2 \backslash a^2 + r^2) +$ $+ Ia^2(b^2 + r^2) \backslash \Pi] -$ при r > b $w = C[\{a^2 + b^2 \backslash a^2 - r^2) +$
18		Равномерно распределенная по площади круга радиуса b нагрузка интенсивностью $q = q_0 = \frac{P}{\pi b^1}$. При r < b $w = C \left(3\frac{b^2 \backslash}{a^2} \right) . b^2 r^2$ $+ 4 \left(\frac{a^2 b^2}{Va} \right) \ln \frac{a}{a} .$ при r > b $w = 2C \left\| \frac{U}{\backslash} \right\| \frac{b2 \backslash}{a^2)} \left\| \frac{}{(1 \cdot - 4 a^2)} \right\|$ $+ 2 \frac{2 \backslash}{} \ln-$

^Использовать выражение для поперечной силы

$$Q = -D \frac{d^2 w}{\backslash d\Pi^2} \frac{I}{z^2} \frac{d^2 w}{d z^2} \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr}$$

где для нагрузки P $Q = \frac{}{2m}$, а для нагрузки, равномерно распределенной по окружности радиуса b, $Q = \frac{\overline{q2nb}}{2яг} = q\frac{b}{г}$.

Исходные данные взять из табл. 11.22.

Таблица 11.22

Номер строки	Номер схемы	*'и* м	*h,* м	*И.* м	*Чо,* кН/м^2
1	0	4	6	0.2	100
2	1	5	5	0.3	80
3	6	6	4	0.25	90
4	4	3	3	0.3	70
5	5	2	2	0.4	60
6	6	3	3	0.5	50
7	7	4	2	0.4	60
8	8	5	5	0.45	70
9	9	6	6	0.3	80
0	10	5	4	0.35	90
	е	*а*	*б*	*в*	*г*

Семейства задач Ms 21
Примеры расчетов сферических куполов

Принимая радиус сферы R, определить эпюры внутренних усилий сферического купола при действии вертикальной равномерно распределенной по поверхности купола нагрузки от собственного веса интенсивностью q.

Исходные данные взять из табл. 11.23.

Таблица 11.23

Номер строки	*R,* м	*q,* кН/м^2
1	10	10
2	15	15
3	20	20
4	30	5
5	40	10
	а	*б*

Семейство задач № 22
Расчет цилиндрической оболочки большой длины

Для цилиндрической трубы (рис. 11.20) большой длины при действии внутреннего давления величиной ***P,*** **требуется:**

1. Построить эпюры прогибов, изгибающих моментов и напряжений a_z.

2. Проверить прочность конструкции, принимая расчетное сопротивление материалов, равным R = 200 МПа, а коэффициент Пуассона р. = 0,3.

Рис. 11.20

Исходные данные взять из табл. 11.24.

Таблица 11.24

Номер строки	***E,*** 10^8кН/М^2	***h,*** 10^{-2}м	***R,*** м	***P,*** МПа
1	2.0	0.5	0.5	4.0
2	1.5	0.6	0.6	5.0
3	1.8	0.8	0.7	6.0
4	1.9	0.9	0.8	7.0
5	2.1	1.0	0.9	8.0
6	2.2	1.1	1.0	9.0
7	1.3	1.2	1.2	10.0
8	2.5	1.3	1.1	12.0
9	2.2	1.4	1.3	14.0
0	2.1	1.5	1.4	15.0
	а	***б***	***в***	***г***

Семейства задач № 23
Расчет цилиндрического резервуара

Для стального цилиндрического резервуара (рис. 11.21) радиусом срединной поверхности R, толщиной стенки h, высотой / , модулем упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициентом Пуассона р = 0,25, полностью наполненного жидкостью с удельным весом у , **требуется:**

1. Определить напряжения в кольцевом направлении достаточно длинного цилиндрического резервуара от внутреннего давления, равного давлению жидкости на глубине / .

2. Построить эпюру радиальных перемещений точек срединной поверхности резервуара.

3. Построить эпюру по высоте резервуара изгибающего момента и эпюру нормальной силы, действующей по окружному направлению.

4. Определить максимальные нормальные напряжения от «краевого эффекта».

5. Проверить прочность резервуара по III теории прочности при расчетном сопротивлении ***R*** = 180 МПа.

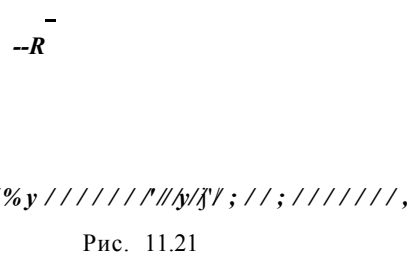


Рис. 11.21

Исходные данные взять из табл. 11.25.

Таблица 11.25

Номер строки	*R*, м	*И*, м	*l*, м	Г. кН/м^3
1	20	0.015	4.0	9.0
2	21	0.014	4.2	10.0
3	22	0.013	4.4	8.0
4	23	0.016	4.6	8.7
5	24	0.010	4.8	8.8
6	19	0.019	3.8	8.9
7	18	0.012	3.6	11.0
8	17	0.011	3.4	12.0
9	16	0.017	3.2	9.5
0	15	0.018	3.0	9.6
	е	*е*	***д***	*в*

Семейство задач № 24
Расчет цилиндрической оболочки на температурные нагрузки

Задано цилиндрическое тело с наружным радиусом R, коэффициентом температурного расширения а, модулем деформации $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м^2, коэффициентом Пуассона р. = 0,3 , при разности температур между наружными и внутренними слоями $/_0$ **> требуется:**

1. Построить эпюру распределения температурных напряжений в сплошном {***RB*** = 0) ив полом цилиндре с внутренним радиусом $R_B = 0{,}9\,R_H$

2. По теории прочности Губера-Мизеса определить характер распределения напряжений в поперечных сечениях сплошного и по-

лого цилиндров, а также проверить прочность конструкции принятой равной $a_т$ = 190 МПа.

Исходные данные взять из табл. 11.26.

Таблица 11.26

Номер строки	м	a, 10^5	'о. С°
1	1.2	1.0	150
2	1.1	1.5	140
3	1.0	3	130
4	0.9	4	120
5	0.8	5	110
6	0.7	4	100
7	0.6	3	90
8	0.5	1	80
9	0.8	2	90
0	0.9	1.5	100
	е	*д*	*в*

11.8. Основы теории пластичности и ползучести

Семейство задач № 25
Расчет заданной системы с учетом пластических деформаций

Принимая $сг_х = 1{,}5 \cdot Ю^5$ кН/м^2, $E_Л = \frac{}{4} E$, а остальные исходные данные взять из табл. 11.27.

Определить перемещения сечения стержня (рис. 11.22) в месте ее скачкообразного изменения и величины внешних сил при различных стадиях его деформирования. Диаграмма деформирования изображена на рис. 8.2, б.

Таблица 11.27

Номер		*F*, $10^{"2}$м^2	*E*, 10^8кН/м^2	*a*, м	*Ь.* м	*с*, м
строки	схемы					
1	0	1	1.5	0.5	1.0	0.5
2	1	2	1.8	1.0	1.1	0.6
3	2	3	1.9	1.2	1.2	0.7
4	3	4	1.6	1.3	1.3	0.8
5	4	4	1.7	1.5	1.4	0.9

Продолжение табл. 11.27

Номер строки	Номер схемы	*F*, 10^{-2} м^2	*E*, 10^8 кН/м^2	*a*, м	*b*, м	*c*, м
6	5	3	2.0	1.4	1.5	1.0
7	6	1	2.1	1.3	1.0	0.8
8	7	1	2.2	1.2	0.9	0.7
9	8	2	2.3	1.1	0.9	1.0
0	9	3	2.4	1.0	0.5	1.5
	а	*д*	*б*	*а*	*е*	*г*

2F 2F

-E L.

2F 2F

i x

2F 2F

P ../ Z P

2F 2F

F

T P

a b

10

2F 2F

Рис. 11.22

Семейства задач Ns 26
Расчет перемещения конструкций с учетом ползучести

Для заданной системы (рис. 11.23) требуется определить перемещения за счет изгиба конструкции в сечениях *A* и С, предполагая материал конструкции упругим, линейно ползучим с ядром

При выполнении расчетов модуль упругости материалов принимаем равным *EQ* - *2* $\cdot 10^8$ кН/м^2, а поперечное сечение конструкций постоянно и имеет форму двутавра.

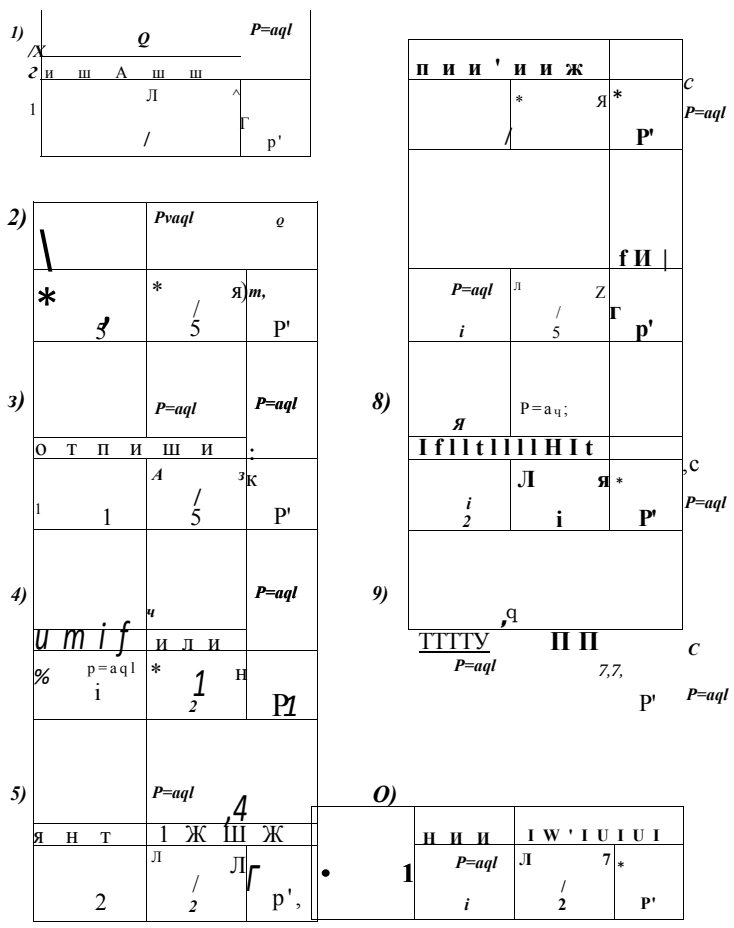


Рис. 11.23

Исходные данные взять из табл. 11.28.

Таблица 11.28

Номер строки	Номер схемы	*у*, 1/суг.	*к*	*1*, м	Номер двутавра	*а*	*q*, кН/м
1	1	0.01	1.05	2	40	0.5	1.0
2	2	0.015	1.1	3	45	1.0	1.5
3	3	0.02	1.15	4	50	0.7	2.0
4	4	0.025	1.2	5	55	0.8	2.5
5	5	0.03	1.25	2	60	1.2	3.0
6	6	0.05	1.3	3	55	1.3	2.5
7	7	0.005	1.35	4	50	1.4	2.0
8	8	0.01	1.4	5	45	1.5	1.5
9	9	0.015	1.45	2	40	2.0	1.0
0	0	0.02	1.5	3	35	1.0	0.5
	а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*а*

11.9. Расчет конструкций по методу предельного равновесия

Семейство задач № 27
Примеры расчетов статически неопределимых систем по методу допускаемых напряжений и предельных состояний

Для статически неопределимых систем (рис. 11.24) по методу допустимых напряжений и по методу предельного равновесного состояния определить расчетную величину внешних расчетных нагрузок и сравнить полученные результаты, полагая, что элементы конструкций в плоскости действия нагрузок имеют поперечное сечение в форме прямоугольника {а х Ъ).

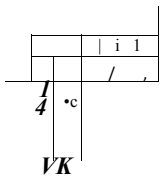
Принимая предел текучести равным $Cj = 2 \cdot 10^5$ кН/м^2, остальные данные взять из табл. 11.29.

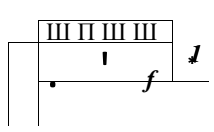
Таблица 11.29

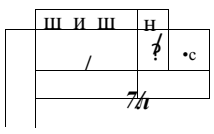
Номер строки	Номер схемы	/, м	о, м	*Ь / А*	А, м
1	0	2.0	0.6	0.8	1.5
2	1	2.5	0.55	0.7	1.0
3	2	3.0	0.5	0.6	1.6
4	3	3.5	0.4	0.5	1.8
5	4	4.0	0.45	0.4	2.0

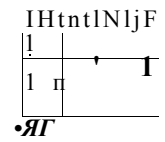
Продолжение табл 11.29

Номер		/,	*а,*	*Ь/а*	А,
строки	схемы	м	м		м
6	5	4.5	0.4	0.5	2.1
7	6	5.0	0.5	0.6	2.2
8	7	40	0.55	0.7	2.5
9	8	3.0	0.6	0.8	30
0	9	2.0	0.5	0.9	2.0
	а	*в*	*г*	*д*	*е*









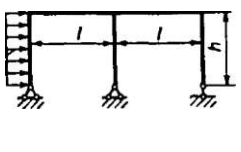


Рис. 11.24

11.10. Расчет конструкций на надежность

Семейство задач N° 28
Расчет размера поперечного сечения статически определимой изгибаемой балки при заданной надежности

Однопролетная шарнирно опертая балка с прямоугольным поперечным сечением b x h, длиной /, на середине пролета приложена сосредоточенная сила величиной Р.

Принимая $h = n \cdot b$, определить размеры поперечного сечения балки при заданной надежности.

Исходные данные взять из табл. 11.30.

Таблица 11.30

Номер строки	A_T Мпа	FCTy	m_p, кН	^{V}P	$m_{,,}$ м	V,	V*	n	H
1	260	0.04	60	0.01	4	0.01	0.011	1.0	0.95
2	270	0.05	70	0.02	5	0.009	0.012	1.1	0.96
3	280	0.06	80	0.03	6	0.008	0.013	1.2	0.97
4	290	0.07	90	0.04	8	0.007	0.014	1.4	0.98
5	300	0.08	100	0.05	10	0.006	0.015	1.5	0.99
	а	*в*	*г*	*е*	*а*	*в*	*г*	*д*	*е*

Семейство задач № 29
Расчет надежности заданной системы

Для стальной статически определимой балки $E - 2 \cdot 10^8$ кН/м^2 (рис. 11.25) с прямоугольным поперечным сечением шириной Ь, допускаемый прогиб $[/] = 0,8 f_{max}$ (f_{max} — максимальный расчетный прогиб балки), предполагая, что внешняя сила, предел текучести материалов и высота поперечного сечения являются случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения, при исходных данных (табл. 11.31), **требуется:**

1. Определить вероятность появления краевой текучести.
2. Применяя метод предельности равновесного состояния, определить вероятность разрушения конструкций.
3. Определить вероятность невыполнения условия жесткости.

Таблица 11.31

Номер строки	Номер схемы	$^{т}_{Р}$, кН	кН	**ю**^{5} кН/м^2	S_a 10^4 кН/м^2	^{m}n, м	**ю-**^{3} м	*1*, м	*ь*, м
1	5	20	3.0	1.9	1.9	0.1	1.0	2	0.05
2	4	25	2.5	2.0	2.0	0.15	1.1	3	0.04
3	3	30	2.0	2.1	2.1	9.12	1.2	4	0.06
4	2	35	1.5	2.2	2.2	0.13	1.3	1.5	0.07
5	1	40	1.0	2.3	2.3	0.14	1.4	2	0.08
	а	*б*	*е*	*г*	*д*	*е*	*а*	*б*	*е*

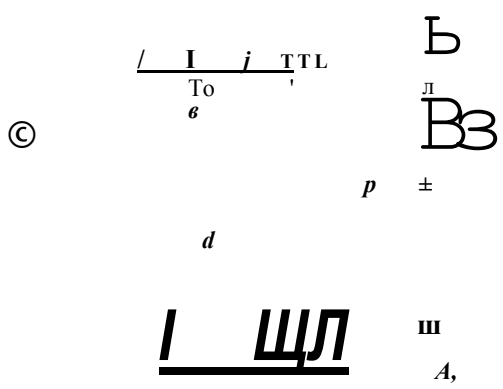


Рис. 11.25

Семейство задач № 30
Расчет поддерживающей и фиксирующей конструкций контактной сети, применяемых на однопутных участках железнодорожного транспорта, на надежность

Для заданной системы (рис. 11.26) при исходных данных, представленных в табл. 11.32, считая их средними значениями случайных величин коэффициентов вариации для размеров конструкций V = 0,015 , для нагрузок и фактической прочности $c_т$ = 190 МПа, V - 0,1 при заданной вероятности надежности H = 0,96.

1. Проверить геометрическую неизменяемость системы.
2. Определить опорные реакции $H_D X_D, H_C, Y_C$.

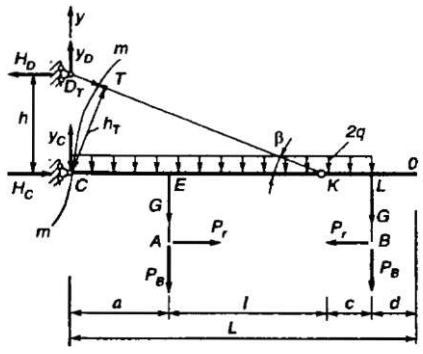


Рис. 11.26

3. Вычислить величины внутренних силовых факторов *Q, N, M_p* в каждом характерном сечении контактной подвески.

4. Проверить равновесие всех узлов.

5. Построить эпюры силовых факторов ***Q,N,M_p***.

6. Рассчитать на прочность и устойчивость конструкции подвески.

7. Рассчитать надежность заданной системы.

Таблица 11.32

Номер строки	S, Кн	*1*, м	*а*. м	*с*. м	*d*, м	А, м	*а°*	**Р°**	№ шв. подвески	Вес 1пм, **ю-²** кН	№ шв. консоли	Вес 1пм, **ю-²** кН
1	1.4	3.0	04	0.4	0.2	0.8	20	30	5	4.84	8	7.05
2	1.5	3.2	0.6	0.3	0.15	0.7	25	25	6.5	5.90	10	8.59
3	1.6	2.8	0.5	0.5	0.2	0.6	30	30	8	7.05	12	10.4
4	1.7	3.2	0.6	0.5	0.15	0.65	25	25	10	8.59	10	8.59
5	1.8	3.5	0.4	0.3	0.15	0.75	20	30	8	7.05	8	7.05
6	1.9	3.0	0.5	0.4	0.2	0.6	30	35	6.5	5 90	12	10.4
7	2.0	28	0.6	0.4	0.2	0.7	25	25	5	4 84	8	7.05
8	1.5	30	0.5	0.5	0.2	0 8	20	30	10	8 59	10	8.59
9	1.6	32	0.4	0.4	0.2	0.65	30	35	8	7 05	12	10.4
0	1.7	3.2	0.4	0.3	0.2	0.7	20	30	6.5	5.90	8	7.05
	а	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.*** Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 2000. 560 с.

2. ***Варданян Т.С., Андреев В.М., Атаров Н.М., Горшков А.А.*** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. — М.: АСВ, 1995. 572 с.

3. *Дарков А.В., Шапошников Н.Н.* Строительная механика. — М.: Высшая школа, 1986. 607 с.

4. *Киселев В.А.* Строительная механика. Общий курс. — М.: Стройиздат, 1986. 520 с.

5. ***Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.Л.*** Основы строительной механики стержневых систем. - М.: Изд-во АСВ, 1996. 541 с.

6. ***Ржаницын А.Р.*** Строительная механика. — М.: Высшая школа, 1982. 400 с.

7. ***Саргсян А.Е., Бедняков В.Г.*** Сейсмостойкость атомных станций. Атомные электростанции. — М.: 1990. 48 с.

8. ***Саргсян А.Е., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А.*** Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов. — М.: АСВ, 1998. 320 с.

9. ***Саргсян А.Е.*** Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. — М.: АСВ, 1998. 240 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие. *3*

ГЛАВА **1. Основные сведения. Расчет статически определимых систем**.....4

1.1. Предмет и задачи строительной механики. Опорные устройства. Виды нагрузок. Классификация сооружений и расчетных схем.....4

1.2. Механические свойства материалов конструкций и основные разрешающие уравнения строительной механики.....7

1.3. Анализ неизменяемости плоских систем.....10

1.4. Статически определимые системы.....11

1.5. Расчет статически определимых многопролетных балок.....12

1.6. Линии влияния и их применение для расчета статически определимых балок.....13

1.7. Матричная форма расчета усилий.....18

1.8. Расчет статически определимой многопролетной балки (задача № 1).....20

1.9. Расчет многопролетных статически определимых балок матричным методом (задача № 2).....27

1.10. Расчет трехшарнирных арок и рам. Линии влияния опорных реакций и усилий.....34

1.11 Расчет трехшарнирной арки (задача № 3).....38

1.12. Расчет трехшарнирной рамы (задача № 4).....45

1.13. Балочные и консольно-балочные плоские фермы. Расчет фермы на постоянную и временную нагрузки.....50

1.14. Методы расчета статически определимых ферм.....51

1.15. Линии влияния усилий **в** фермах.....53

1.16. Невыгоднейшее загружение линии влияния. Критический груз.....58

1.17. Расчет плоской фермы (задача № 5).....60

1.18. Расчет шпренгельной фермы на постоянную и временную нагрузку (задача № 6).....66

Вопросы для самопроверки.....77

ГЛАВА 2. **Расчет статически неопределимых стержневых систем**.....78

2.1. Статически неопределимые стержневые системы.....78

2.2. Определение перемещений в стержневой системе.....80

2.3. Расчет рам методом сил.....*83*

2.4. Пример расчета плоской рамы методом сил (задача № 7).....89

2.5. Метод перемещений. Степень кинематической неопределимости рам.....99

2.6. Основная система. Канонические уравнения метола перемещений.....10]

2.7. Определение реакций в однопролетных статически неопределимых стержневых элементах.....104

2.8. Пример расчета плоской рамы методом перемещений (задача № 8).....107

2.9. Расчет неразрезной балки методом сил. Уравнение трех моментов.....119

2.10. Построение линий влияния опорных моментов кинематическим методом.....122

2.11. Расчет неразрезной балки на действие постоянных и временных нагрузок (задача № 9).....128
Вопросы для самопроверки.....136
ГЛАВА 3. Балка на упругом основании. 138
3.1. Дифференциальное уравнение оси изогнутой балки, лежащей на сплошном упругом основании.....138
3.2. Анализ общего решения дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании.....141
3.3. Расчет бесконечно длинной балки, нагруженной сосредоточенной силой .143
3.4. Расчет балки бесконечной длины, нагруженной системой сосредоточенных сил.....145
3.5. Расчет элементов верхнего строения железнодорожного пути как балки бесконечной длины на упругом основании (задача № 10).....147
3.6. Расчет коротких балок на упругом основании Функции Крылова.....150
3.7. Расчет шпалы рельсового пути, как короткой балки на упругом основании (задача № 11).....158
Вопросы для самопроверки.....163
ГЛАВА 4. Устойчивость сооружений. 165
4.1. Предмет и задачи устойчивости.....165
4.2. Критерии определения устойчивости упругих систем.....166
4.3. Задача Эйлера.....168
4.4. Устойчивость стержней с различными концевыми условиями их закрепления.....170
4.5. Выражения изгибающих моментов и поперечных сил в концевых - сечениях стержней.....175
4.6. Устойчивость рам при действии узловых нагрузок. Метод перемещений.....179
4.7. Пример расчета рамы на устойчивость (задача № 12).....181
Вопросы для самопроверки.....185
ГЛАВА 5. Динамика сооружений.....186
5.1. Предмет и задачи динамики сооружений.....186
5.2. Системы с одной степенью свободы.....187
5.3. Пример расчета балки в виде системы с одной степенью свободы (задача № 13).....191
5 4. Свободные колебания системы с произвольным числом степеней свободы.....193
5.5 Вынужденные колебания систем с произвольным числом степеней свободы при действии вибрационной нагрузки.....196
5.6. Пример динамического расчета рамы (задача № 14).....199
5.7. Сейсмические колебания системы с конечным числом степеней свободы.....209
5.8. Определение величин сейсмических усилий при расчете сооружения на сейсмостойкость (задача № 15).....218
5.9. Поперечные колебания балки с распределенными параметрами.....228
5 10. Определение основной частоты собственных колебаний консольной балки (задача № 16).....230
Вопросы для самопроверки.....231

ГЛАВА 6. Изгиб и кручение тонкостенных стержней 233
6.1. Общие положения и основные особенности расчета 233
6 2 Секториальная площадь 235
6.3 Секториальные характеристики и их определение 236
6.4 Общий случай нагружения тонкостенного стержня Бимомент 238
6.5 Расчет тонкостенного стержня открытого профиля (задача № 17) 243
Вопросы для самопроверки .. 251
ГЛАВА 7. Пластины и оболочки 252
7.1. Основные положения теории оболочек 252
7.2 Изгиб тонкостенных симметрично нагруженных круглых пластин 254
7.3. Расчет плиты с жестко защемленным и шарнирно опертым контуром (задача №18). 257
7.4. Расчет пластины, нагруженной сосредоточенной силой (задача № 19) ... 261
7.5. Изгиб с прямоугольным очертанием по контуру тонкостенной пластины. 262
7.6. Примеры расчетов тонкостенной пластины (задача № 20) 266
7.7. Расчет прямоугольных пластин с шарнирно опертым контуром при действии произвольной поперечной напзузки 268
7.8. Расчет сферической оболочки вращения 272
7.9. Пример расчета симметричной оболочки вращения (задача № 21) 275
7 10. Изгиб тонкостенной цилиндрической оболочки при симметричном нагружении 276
7.11. Расчет длинной цилиндрической трубы при действии внутреннего давления (задача № 22). 281
7.12 Расчет вертикально стоящего открытого цилиндрического бака заполненного доверху жидкостью (задача № 23) 283
7.13 Расчет цилиндрической трубы при воздействии температуры 286
7.14 Пример расчета трубы при действии температуры (задача № 24) 289
Вопросы для самопроверки 292
ГЛАВА 8. Основы теории пластичности и ползучести 293
8.1 Основы деформационной теории пластичности..... 293
8 2. Упругогиастический расчет стержня при действии продольной силы (задача № 25) 295
8.3. Упругогиастический изгиб бруса 299
8.4. Основы теории ползучести 301
8.5. Расчет перемещения балки с учетом ползучести (задача № 26) 306
Вопросы для самопроверки 309
ГЛАВА 9. Расчет конструкций по методу предельного равновесия . 310
9 1. Основные положения 310
9.2 Определение предельного состояния системы при растяжении-сжатии 311
9.3. Предельное состояние статически определимых систем при изгибе 314
9.4 Расчет статически неопределимых балок по предельному состоянию Кинематический и статический способы 316
9.5 Пример расчета статически неопределимой балки (задача № 27) 323
Вопросы для самопроверки. 325
РАЗДЕЛ **10. Расчет конструкций на надежность** 326
10.1 Общие положения расчета на надежность 326

10.2. Основные сведения из теории вероятности и математической статистики....327
10.3. Функции случайных величин и методы оценки надежности....***331***
10.4. Определение высоты поперечного сечения статически определимой балки при заданной надежности — обратная задача теории надежности (задача № 28)....340
10.5. Расчет статически определимой балки на надежность — прямая задача теории надежности (задача № 29)....343
10.6. Расчет поддерживающих устройств контактной сети (задача № 30)....346
Вопросы для самопроверки....366
ГЛАВА 11. Задачи для самостоятельных и контрольных работ....367
11.1. Основные сведения. Расчет статически определимых систем....367
11.2. Расчет статически неопределимых стержневых систем....379
11.3. Балка на упругом основании....386
11.4. Устойчивость сооружений....387
11.5. Динамика сооружений....***389***
11.6. Изгиб и кручение тонкостенных стержней....394
11.7. Пластинки и оболочки....396
11.8. Основы теории пластичности и ползучести....404
11.9. Расчет конструкций по методу предельного равновесия....407
11.10. Расчет конструкций на надежность....409
Литература....412

Учебное издание

Саргсян Акоп Егишович
Демченко Анатолий Тимофеевич
Дворянчиков Николай Васильевич
Джинчвелашвили Гурам Автандилович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
Основы теория с примерами расчетов

Зав. редакцией *Т.А. Рыкова*
Художественный редактор *Ю.Э. Иванова*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ВТИ-80. Подл, в печать 11.08.2000.
Формат 60x88Vi6- Бум. газета. Гарнитура Тайме. Печать офсетная.
Объем 25,42 усл. печ. л., 25,42 усл. KD-OTT, 23,54 уч.-изд. л.
Тираж 8000 экз. Заказ № 140

ГУЛ «Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4,
Неглинная ул, д. 29/14.
Факс: 200-03-01, 200-06-87
E-mail: V-Shkola@g23jelcoraJU http: // www.v-shkola.ru

Отпечатано в ОАО «Оригинал», 101898, Москва, Центр,
Хохловский пер., д. 7.