для докритического режима обтекания

$$P_{уп}=\frac{1}{2}\rho Dv^2\left[a\cos kt+\frac{b}{kD}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{c}{k^3D^3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^3\right], \quad (5.43)$$

для закритического режима

$$P_{уп}=\frac{1}{2}\rho Dv^2\left[a_1\cos kt+\frac{b_1}{kD}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{c_1}{k^3D^3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^3\right]. \quad (5.44)$$

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний подводного трубопровода с учетом вынуждающей силы по формуле (5.43) можно представить в виде

$$\frac{EI}{l^4}\cdot\frac{d^4y}{d\bar{x}^4}+(m+m_{пр})\frac{\partial^2y}{\partial t^2}-\frac{N}{l^2}\cdot\frac{\partial^2y}{\partial\bar{x}^2}+\beta_1\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{2}\rho Dv^2\times$$

$$\times\left[a\cos kt+\frac{b}{kD}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{c}{k^3D^3}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^3\right], \quad (5.45)$$

где $\bar{x}=x/l$ — безразмерная координата; l — длина колеблющегося участка трубопровода.

Поскольку уравнение (5.45) нелинейное, оно не может быть проинтегрировано методом Фурье, как это было сделано в предыдущем параграфе.

Решение уравнения (5.45) примем в виде

$$y(\bar{x},\ t)=X(\bar{x})\,T(t), \quad (5.46)$$

где $X(\bar{x})$ — форма основного тона колебаний трубопровода, соответствующая уравнению

$$\frac{EI}{l^4}X^{IV}(\bar{x})-\frac{N}{l^2}X^{II}(\bar{x})=(m+m_{пр})\,\omega^2X(\bar{x}). \quad (5.47)$$

После подстановки выражения (5.46) в уравнение (5.45), учета значения (5.47), умножения (5.45) на $X(\bar{x})d\bar{x}$ и интегрирования в пределах от 0 до 1, получаем

$$\ddot{T}(t)+\mu_1\dot{T}(t)-\mu_2\left[\dot{T}(t)\right]^3+\omega^2T=F\cos kt, \quad (5.48)$$

где

$$\mu_1=\frac{1}{m+m_{пр}}\left(\beta_1-\frac{1}{2}b\rho\frac{v^2}{\omega}\right); \quad (5.49)$$

$$\mu_2=\frac{c\rho v^2}{2(m+m_{пр})\,\omega^3D^2}\cdot\frac{\int_0^1X^4(\bar{x})\,d\bar{x}}{\int_0^1X^2(\bar{x})\,d\bar{x}}; \quad (5.50)$$

$$F=\frac{a\rho Dv^2}{2(m+m_{пр})}\cdot\frac{\int_0^1X(\bar{x})\,d\bar{x}}{\int_0^1X^2(\bar{x})\,d\bar{x}}. \quad (5.51)$$

Считая, что μ_1 и μ_2 достаточно малы, решение уравнения (5.48) будет близко к решению линейной консервативной системы

$$T(t)=a_0\cos\tau+b_0\sin\tau. \quad (5.52)$$

где $\tau=kt$ — безразмерное время; a_0 и b_0 — для стационарного колебательного режима постоянные функции, а для периода установления колебаний — медленно изменяющиеся функции времени по сравнению с периодом колебаний.

Для решения уравнения (5.48) используем метод Ван-дер-Поля, для этого приведем его к виду

$$\ddot{T}(t)+k^2T(t)=(k^2-\omega^2)\,T(t)-\mu_1\dot{T}(t)+\mu_2\left[\dot{T}(t)\right]^3+F\cos\tau. \quad (5.53)$$

Подставляя выражение (5.52) в уравнение (5.53) и учитывая условие

$$\frac{da_0}{d\tau}\cos\tau+\frac{db_0}{d\tau}\sin\tau=0, \quad (5.54)$$

получаем

$$\frac{da_0}{d\tau}=-[(k^2-\omega^2)(a_0\cos\tau+b_0\sin\tau)+\mu_1k(a_0\sin\tau-b_0\cos\tau)+$$

$$+\mu_2k^3(-a_0\sin\tau+b_0\cos\tau)^3+F\cos\tau]\sin\tau; \quad (5.55)$$

$$\frac{db_0}{d\tau}=[(k^2-\omega^2)(a_0\cos\tau+b_0\sin\tau)+\mu_1k(a_0\sin\tau-b_0\cos\tau)+$$

$$+\mu_2k^3(-a_0\sin\tau+b_0\cos\tau)^3+F\cos\tau]\cos\tau. \quad (5.56)$$

Заменим правые части уравнений (5.55) и (5.56) интегральными средними за период колебаний, для этого умножим их на $d\tau$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π:

$$\frac{da_0}{d\tau}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(k^2-\omega^2)(a_0\cos\tau+b_0\sin\tau)+\mu_1k(a_0\sin\tau-b_0\cos\tau)+$$

$$+\mu_2k^3(-a_0\sin\tau+b_0\cos\tau)^3+F\cos\tau]\sin\tau\,d\tau; \quad (5.57)$$

$$\frac{db_0}{d\tau}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(k^2-\omega^2)(a_0\cos\tau+b_0\sin\tau)+\mu_1k(a_0\sin\tau-b_0\cos\tau)+$$

$$+\mu_2k^3(-a_0\sin\tau+b_0\cos\tau)^3+F\cos\tau]\cos\tau\,d\tau. \quad (5.58)$$

Интегрируя уравнения (5.57) и (5.58) и учитывая, что для стационарного режима $da_0/d\tau=0$ и $db_0/d\tau=0$, получаем

$$\frac{da_0}{d\tau}=(k^2-\omega^2)\,b_0+\mu_1ka_0-\frac{3}{4}\mu_2k^3a_0\left(a_0^2+b_0^2\right)=0; \quad (5.59)$$

$$\frac{db_0}{d\tau}=(k^2-\omega^2)\,a_0-\mu_1kb_0+\frac{3}{4}\mu_2k^3b_c\left(a_0^2+b_0^2\right)+F=0. \quad (5.60)$$