нию с резонансной, при назначении переменных гидродинамических сил в уравнении (5.4) ограничимся двумя слагаемыми:

$$P_{y\,\text{п}} = \frac{1}{2}\left(a\cos kt + \frac{b}{kD}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\rho D v^2. \qquad (5.30)$$

Принимая силы сопротивления пропорциональными скорости колебаний и присоединенные массы жидкости равномерно распределенными по длине трубы, получаем дифференциальное уравнение изгибных колебаний подводного трубопровода

$$EI\frac{\partial^4 y}{dx^4} + (m + m_{\text{пр}})\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - N\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\beta_1 - \frac{1}{2}\frac{\rho b v^2}{k}\right)\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2}\rho D v^2 a\cos kt. \qquad (5.31)$$

Решение уравнения (5.31) будем искать в виде разложения в ряд по фундаментальным функциям $X_i(\bar{x})$ соответствующей однородной задачи

$$y_i(\bar{x},\ t) = X_i(\bar{x})\,T_i(t). \qquad (5.32)$$

Подставляя выражение (5.32) в однородное уравнение (5.31), получаем два уравнения относительно $X_i(\bar{x})$ и $T_i(t)$:

$$X_i^{\text{IV}}(\bar{x}) - \beta^2 X_i^{\text{II}}(\bar{x}) - \alpha_i^4 X_i(\bar{x}) = 0; \qquad (5.33)$$

$$\ddot{T}_i(t) + \mu\dot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = 0, \qquad (5.34)$$

где

$$\beta^2 = \frac{Nl^2}{EI}; \qquad \alpha_i^4 = \frac{m + m_{\text{пр}}}{EI}\,l^4\omega_i^2;$$

$$\mu = \frac{\beta_1 - \dfrac{b\rho v^2}{2k}}{m + m_{\text{пр}}};$$

$\bar{x} = x/l$; l — длина колеблющегося участка трубопровода.

Решение уравнения (5.33):

$$X_i(\bar{x}) = A_i\,\text{ch}\,\lambda_i\bar{x} + B_i\,\text{sh}\,\lambda_i\bar{x} + C_i\cos\lambda_{i1}\bar{x} + D_i\sin\lambda_{i1}\bar{x}, \qquad (5.35)$$

где

$$\lambda_i = \sqrt{\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + \alpha_i^4}}; \qquad \lambda_{i1} = \sqrt{-\frac{\beta^2}{2} + \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + \alpha_i^4}}; \qquad (5.36)$$

A_i, B_i, C_i, D_i — постоянные, определяемые из граничных условий.

Рассмотрим вынужденные колебания, для этого необходимо проинтегрировать неоднородное уравнение (5.31). Решение представим в виде

$$y(\bar{x},\ t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(\bar{x})\,T_i(t). \qquad (5.37)$$

Подставляя выражение (5.37) в уравнение (5.31) и учитывая свойство ортогональности для фундаментальных функций

$$\int_0^1 X_i(\bar{x})\,X_j(\bar{x})\,d\bar{x} = 0, \quad (i \neq j),$$

получаем

$$\ddot{T}_i(t) + \mu\dot{T}_i(t) + \omega_i^2 T_i(t) = f_i\cos kt, \qquad (5.38)$$

где

$$f_i = \frac{a\rho D v^2}{2(m + m_{\text{пр}})}\,\frac{\int_0^1 X_i(\bar{x})\,d\bar{x}}{\int_0^1 X_i^2(\bar{x})\,d\bar{x}}. \qquad (5.39)$$

Частное решение уравнения (5.38)

$$T_i(t) = f_i\,\frac{\cos(kt - \varphi)}{\sqrt{(\omega_i^2 - k^2)^2 + \mu^2 k^2}}. \qquad (5.40)$$

Общее решение определяет свободные колебания трубопровода, зависящие от начальных условий. Свободные колебания со временем затухают (и, следовательно, не представляют практического интереса), а остаются лишь вынужденные колебания. Для чисто вынужденных колебаний решение уравнения (5.31) с учетом выражений (5.37) и (5.40) примет вид

$$y(\bar{x},\ t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i X_i(\bar{x})\,\frac{\cos(kt - \varphi)}{\sqrt{(\omega_i^2 - k^2)^2 + \mu^2 k^2}}. \qquad (5.41)$$

Во многих случаях в практических расчетах колебаний подводных трубопроводов достаточно ограничиться первой собственной формой ($i = 1$), тогда

$$y(\bar{x},\ t) = f_1 X_1(\bar{x})\,\frac{\cos(kt - \varphi)}{\sqrt{(\omega_1^2 - k^2) + \mu^2 k^2}}. \qquad (5.42)$$

§ 5.8. РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОДВОДНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Резонансные колебания возникают при совпадении частоты вынуждающей силы и собственной частоты колебаний подводного трубопровода. При резонансе амплитуды колебаний и динамические напряжения достигают наибольшей величины и могут явиться причиной аварии подводного трубопровода. Поскольку амплитуды колебаний значительны, коэффициент $C_{y\text{п}}$ вынуждающей силы принимается по формуле (5.3), а величина вынуждающей силы примет вид: