

РИС. 5.7.
Расчетная схема трубопровода

Следовательно, эксперименты показывают, что собственные частоты колебаний трубопровода зависят от вида и состояния грунта, окружающего трубопровод на прилегающих подземных участках. Собственные частоты колебаний значительно отличаются от частот, вычисленных по формулам (5.12) и (5.13) для случая шарнирного или жесткого закрепления концов стержня.

Представим расчетную схему трубопровода (рис. 5.7) как балку, состоящую из двух подземных участков *I* и *III* (полубесконечных балок на упругом основании) и среднего участка *II* — балки длиной l с упруго закрепленными концами.

Считая схему симметричной, расположим начало координат в середине участка *II*.

Дифференциальное уравнение собственных поперечных колебаний участка *II* имеет вид

$$EI\frac{\partial^4\bar{y}_2}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2\bar{y}_2}{\partial t^2}=0, \tag{5.14}$$

где EI — изгибная жесткость трубы; m — масса единицы длины трубы с продуктом для надземного участка; в случае подводного участка значение m следует увеличить на присоединенную массу жидкости $m_{\text{пр}}$.

Принимая в уравнении (5.14) $\bar{y}_2=y_2\sin\omega t$, получаем

$$\frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4}-\beta^4 y_2=0, \tag{5.15}$$

где

$$\beta^4=\frac{m\omega^2}{EI}, \tag{5.16}$$

ω — угловая частота свободных колебаний.

Общий интеграл уравнения (5.15)

$$y_2(x)=C_1S+C_2T+C_3U+C_4V. \tag{5.17}$$

Производные функции $y_2(x)$ по x

$$\begin{aligned}
y_2^{\text{I}}(x)&=\beta(C_1V+C_2S+C_3T+C_4U);\\
y_2^{\text{II}}(x)&=\beta^2(C_1U+C_2V+C_3S+C_4T);\\
y_3^{\text{III}}(x)&=\beta^3(C_1T+C_2U+C_3V+C_4S),
\end{aligned} \tag{5.18}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Имея в виду, что при $x=0$ $y_2^{\text{I}}(x)=0$ и $y_2^{\text{III}}(x)=0$, получаем $C_2=C_4=0$.

При $x=l/2$

$$y_2=C_1S\left(\frac{\beta l}{2}\right)+C_3U\left(\frac{\beta l}{2}\right);\quad y_2^{\text{I}}=\left[C_1V\left(\frac{\beta l}{2}\right)+C_3T\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right]\beta,$$

$$y_2^{\text{II}}=\left[C_1U\left(\frac{\beta l}{2}\right)+C_3S\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right]\beta^2;\quad y_2^{\text{III}}=\left[C_1T\left(\frac{\beta l}{2}\right)+C_3V\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right]\beta^3. \tag{5.19}$$

Дифференциальное уравнение собственных колебаний подземных участков трубопровода *I* и *III* (см. рис. 5.7) как полубесконечных балок на упругом основании имеет вид

$$EI\frac{\partial^4\bar{y}_1}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2\bar{y}_1}{\partial t^2}+kD\bar{y}_1=0, \tag{5.20}$$

где k — коэффициент постели грунта; D — диаметр трубы.

Принимая $\bar{y}_1=y\sin\omega t$, получаем

$$\frac{d^4y_1}{dx^4}+4\alpha^4y_1=0; \tag{5.21}$$

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{kD-m\omega^2}{4EI}}. \tag{5.22}$$

Общий интеграл уравнения (5.21) может быть представлен в виде

$$y_1^{(\lambda)}=A_1e^{\lambda}\cos\lambda+A_2e^{\lambda}\sin\lambda+A_3e^{-\lambda}\cos\lambda+A_4e^{-\lambda}\sin\lambda, \tag{5.23}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные;

$$\lambda=\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right);\quad x\geqslant\frac{l}{2}.$$

При $x\to\infty$ $y_1(\lambda)\to0$, следовательно, $A_1=A_2=0$.

Производные функции $y_1(\lambda)$ равны

$$\begin{aligned}
y_1^{\text{I}}(\lambda)&=e^{-\lambda}\left[(A_4-A_3)\cos\lambda-(A_4+A_3)\sin\lambda\right];\\
y_1^{\text{II}}(\lambda)&=2e^{-\lambda}(A_3\sin\lambda+A_4\cos\lambda);\\
y_1^{\text{III}}(\lambda)&=2e^{-\lambda}\left[(A_4+A_3)\cos\lambda+(A_4-A_3)\sin\lambda\right];
\end{aligned} \tag{5.24}$$