Зависимость между τ_x и продольными перемещениями трубы u в сечении x для участка l_1 примем в виде

$$\tau_x = \tau_{пр\,1} \sin \alpha \sqrt{u}, \tag{10.10}$$

где $\alpha \sqrt{u} \leqslant \pi/2$; α — коэффициент, характеризующий продольные перемещения трубы в грунте.

Значения α могут быть получены на основании экспериментов или при известных предельных упругих перемещениях грунта u_1 из условия

$$\alpha \sqrt{u_1} = \frac{\pi}{2}. \tag{10.11}$$

Подставляя зависимость (10.10) в уравнение (10.9) и учитывая, что $T_x = EF \frac{du}{dx}$; $\frac{dT_x}{dx} = EF \frac{d^2u}{dx^2}$, получаем

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \beta^2 \sin \alpha \sqrt{u} = 0, \tag{10.12}$$

где $\beta^2 = \alpha \tau_{пр\,1}/EF$; E и F — модуль упругости и площадь поперечного сечения трубы.

Нелинейное дифференциальное уравнение (10.12) приводится к уравнению первого порядка методом интегрирующего множителя

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \frac{4\beta^2}{\alpha^2} \left(\sin \alpha \sqrt{u} - \alpha \sqrt{u} \cos \alpha \sqrt{u}\right) + C_1. \tag{10.13}$$

Из условий $x=0$, $u=0$ и $du/dx=0$ произвольная постоянная $C_1=0$.

Решение уравнения (10.13):

$$x = \frac{\alpha}{2\beta} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{\sin \alpha \sqrt{u} - \alpha \sqrt{u} \cos \alpha \sqrt{u}}}. \tag{10.14}$$

Точное значение x или l_1 может быть получено непосредственно из уравнения (10.14). Для практических расчетов более удобно использовать приближенную формулу

$$x = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{12\sqrt{u}}{\alpha}}, \tag{10.15}$$

которая получена из решения уравнения (10.14) и имеет погрешность в определении x менее 1%.

При $x=l_1$ упругие перемещения u достигают предельных значений

$$u_1 = \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2. \tag{10.16}$$

Подставляя выражение (10.16) в формулу (10.15), находим длину участка

$$l_1 = \frac{\sqrt{6\pi}}{\alpha\beta}. \tag{10.17}$$

Продольное усилие, воспринимаемое грунтом на участке $x \leqslant l_1$, с учетом выражений (10.13) и (10.14) равно

$$T_x = EF \frac{du}{dx} = \frac{2\beta}{\alpha} EF \sqrt{\sin \frac{(\alpha\beta x)^2}{12} - \frac{(\alpha\beta x)^2}{12} \cos \frac{(\alpha\beta x)^2}{12}}. \tag{10.18}$$

Принимая в формуле (10.18) $x=l_1$, получаем предельное значение продольного усилия, воспринимаемого участком l_1,

$$T_1 = \frac{2\beta}{\alpha} EF. \tag{10.19}$$

При $u > u_1$ на участке трубопровода длиной l_2 (см. рис. 10.18, *б*) имеется предельное напряженное состояние в грунте.

Максимальное тяговое усилие T в момент трогания при протаскивании всего трубопровода длиной l возникает, когда на концах участка l_1 касательные напряжения будут равны $\tau_{пр\,1}$ и $\tau_{пр\,2}$ (рис. 10.20) или

$$T = a\tau_{пр\,2}(l_2 + x_1) + T_1 - T_{x\,1}, \tag{10.20}$$

где $T_{x\,1}$ — продольное усилие в трубопроводе в сечении x_1 участка l_1.

Значение x_1 находим из выражения (10.10), приравнивая $\tau_x = \tau_{пр\,2}$ и учитывая зависимость (10.15)

$$x_1 = \frac{1}{\alpha\beta} \sqrt{12 \arcsin \frac{\tau_{пр\,2}}{\tau_{пр\,1}}}. \tag{10.21}$$

После подстановки выражений (10.18), (10.19), (10.21) в формулу (10.20) получаем

$$T = a\tau_{пр\,2}(l_2 + x_1) + \frac{2\beta EF}{\alpha} \left[1 - \sqrt{\frac{\tau_{пр\,2}}{\tau_{пр\,1}} - \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{пр\,2}}{\tau_{пр\,1}}\right)^2} \arcsin \frac{\tau_{пр\,2}}{\tau_{пр\,1}}}\right]. \tag{10.22}$$

Если в сечении трубопровода $x=0$ перемещение достигает значения $u > u_1$, т. е. трубопровод тронулся с места, то на всей его длине $l\,\tau(x) = \tau_{пр\,2}$.

Приравнивая в (10.22) $\tau_{пр\,1} = \tau_{пр\,2}$ и $l_2 + x_1 = l$, получаем

$$T = a\tau_{пр\,2} l, \tag{10.23}$$

что соответствует формуле (10.4), а также (10.5) без учета $T_у$ и $E_{пас}$.

Дополнительное усилие, обусловленное упругим взаимодействием трубопровода с грунтом в момент трогания $T_у$, будет

$$T_у = T_1 - T_{x1} - a\tau_{пр\,2}(l_1 - x_1) = -a\tau_{пр\,2}(l_1 - x_1) + \frac{2\beta}{\alpha} EF \left[1 - \sqrt{\frac{\tau_{пр\,2}}{\tau_{пр\,1}} - \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{пр\,2}}{\tau_{пр\,1}}\right)^2} \arcsin \frac{\tau_{пр\,2}}{\tau_{пр\,1}}}\right]. \tag{10.24}$$